

Stödmaterial i lång matematik

Grunderna för gymnasiets läroplan 2019 -
Granskning av innehållet av modulerna i lång matematik



Representanter för Riksförbundet för lärare i matematiska ämnen, MAOL r.f., och medlemmar som deltagit i läroämnesgruppen för uppgörandet av Grunderna för gymnasiets läroplan 2019 har tillsammans producerat stödmaterial för att öppna upp de centrala innehållen i modulerna i lång matematik.

INNEHÅLL

Obligatoriska studier

MAG1 Tal och ekvationer	9
MAA2 Funktioner och ekvationer 1	12
MAA3 Geometri.....	14
MAA4 Analytisk geometri och vektorer.....	16
MAA5 Funktioner och ekvationer 2	19
MAA6 Derivata	21
MAA7 Integralkalkyl.....	24
MAA8 Statistik och sannolikhet.....	26
MAA9 Ekonomisk matematik.....	28
Nationella valfria studier	
MAA10 3D-geometri	30
MAA11 Algoritmer och talteori.....	32
MAA12 Analys och kontinuerlig fördelning	34

Vi tackar följande för understödet:



Teknologiateollisuuden
100-vuotissäätiö



SVENSKA FOLKSKOLANS VÄNNER

This event is supported by the European Commission's H2020 programme – project Scientix 3 (Grant agreement N. 730009), coordinated by European Schoolnet (EUN). The event is the sole responsibility of the organizer and it does not represent the opinion of the European Commission (EC) or EUN, and neither the EC or EUN are responsible for any use that might be made of information contained.

INLEDNING

Detta material som är avsett till att stöda det lokala läroplansarbetet i matematik har gjorts i samarbete med arbetsgruppen för uppgörandet av läroplanen i gymnasiets matematik vid Utbildningsstyrelsen och Riksförbundet för lärare i matematiska ämnen MAOL r.f. Materialet ska precisera och öppna den vanligen rätt normativa framställningen av grunderna för läroplanen. Vi hoppas och tror att det ska klargöra arbetsgruppens tankar kring begränsningen av de centrala innehållen och att det ska hämta nya synvinklar på planeringen av undervisningen. Stödmaterialet är inte bindande utan de föreslagna förverkligande metoderna och exemplen är riktgivande.

I de nya grunderna för gymnasiets läroplan har man beskrivit den mångsidiga kompetensen allmänt och läroämnesspecifikt. I de lokala läroplanerna är det meningen att skolorna ska skriva in hur målen för denna mångsidiga kompetens ska förverkligas i de olika studieavsnitten. Stödmaterialet öppnar upp hur den mångsidiga kompetenstänkandet kunde synas i matematikundervisningen. På grund av matematikens natur ser det ut som om man bäst kan förverkliga områdena för den mångsidiga kompetensen i de olika studieavsnitten genom att i varje situation betona en specifik mångsidig kompetens.

De nya grunderna för gymnasiets läroplan förutsätter att den studerande i matematikstudierna utvecklar sitt kunnande i att utnyttja datorprogramvara och digitala kunskapskällor vid inläring, undersökning och problemlösning samt bedömer nyttan av användning av datatekniska hjälpmedel och begränsning av användandet av dessa. I detta stödmaterial framläggs hur man kunde utveckla den studerandes programfärdigheter under studiernas gång och vilka färdigheter som önskas. Man förbättrar programfärdigheterna stegvis genom att lägga till användning av dem i det innehåll som behandlas i ett visst studieavsnitt. Ett centralt mål är att den studerande övar sig i att använda olika program fiffigt och att hen i varje situation kan använda det hjälpmedel (bl.a. tabellkalkyl, symbolisk kalkyl, geometriprogram) som lämpar sig bäst för situationen.

I samband med beskrivningen av programfärdigheterna i detta stödmaterial används ord som *bekanta sig med*, *lära sig*, *kunna* och *öva sig i att* i följande betydelse:

Bekanta sig med. Den studerande möter eventuellt färdigheten för första gången och lär sig denna eventuellt i fortsatta studier. Vid detta skede av studierna kan målet exempelvis vara att väcka intresse för saken.

Lära sig. Den studerande övar (eventuellt) färdigheten för första gången.

Kunna. Färdigheter som inlärts i tidigare studier utvecklas eventuellt i en ny situation.

Öva sig i att. Färdigheten har övats och övas frekvent varmed kunnandet blir en rutin.

MÅNGSIDIG KOMPETENS I MATEMATIK

I undervisningen ska man undersöka sambanden mellan matematiken och vardagslivet och utnyttja möjligheterna att stärka den studerandes intresse, självförtroende och informationssökningsprocesser samt uppmuntra den studerande att experimentera och arbeta med uthållighet. De färdigheter som den studerande utvecklar tillämpas då hen ställer upp egna mål och fattar beslut. Den studerande ska även reflektera över hur färdigheterna i matematik kan användas för hållbar utveckling och för att lösa problem som rör mänskligheten. På det här sättet stärks den studerandes samhälleliga kompetens, etiska kompetens och miljökompetens samt kompetens för välbefinnande.

Undervisningen tar avstamp i sådana teman och fenomen samt tillhörande problem som intresserar de studerande och som kan lösas med hjälp av matematik. I undervisningen används varierande arbetssätt där den studerande arbetar på egen hand eller i grupp. På det sättet stärks bland annat den studerandes kommunikativa kompetens. Arbetssätten väljs tillsammans med

de studerande. Undervisningen planeras så att de studerande utifrån sina egna observationer stimuleras att ställa frågor, framlägga hypoteser, dra slutsatser och motivera dessa.

Studierna i matematik stödjer målen för global och kulturell kompetens samt tvärvetenskaplig och kreativ kompetens. Den studerande ska vägledas att förstå matematikens betydelse i olika kulturer och den historiska utvecklingen samt dess karaktär som ett universellt språk. Den studerande ska vägledas till insikt om de matematiska begreppens innebörd och lära sig känna igen hur de hänger samman med större helheter, både inom matematiken och inom andra läroämnen. Den studerande uppmuntras att använda ett matematiskt språk och matematiska tecken samt bilder, figurer och redskap som stödjer det matematiska tänkandet. Den studerande ska få hjälp att utveckla sin förmåga att växla mellan olika sätt att framställa matematisk information när hen ska skapa modeller av fenomen, förstå och lösa problem samt diskutera resultatet.

UTVECKLANDET AV FÄRDIGHETERNA I MÅNGSIDIG KOMPETENS I MATEMATIK

I grunderna för gymnasiets läroplan har man beskrivit hur de olika områdena inom den mångsidiga kompetensen ingår i matematikstudierna och de finns även nedtecknade i målen för studierna i matematik. I den

lokala läroplanen kompletterar vi de mångsidiga kompetensfärdigheterna och konkretiserar dessa för matematikens del. Ytterligare definierar vi hur målen för de olika delområdena förverkligas i respektive studieavsnitt.

I matematikstudierna närmar vi oss den mångsidiga kompetensen med utgångspunkt i vetenskaperna. Mångsidigheten kan synas i matematikundervisningen exempelvis på följande sätt:

Vi handleder den studerande till att målriktigt identifiera och utnyttja sina egna styrkor och å andra sidan till att lägga märke till att framgång i matematik innebär långsiktigt arbete, uthållighet och tålamod. I undervisningen stöder vi tålandet av osäkerhet och förstärker tilliten. Detta leder till att den studerande lär sig att bedöma sina egna resurser och tidsanvändning. Vi uppmuntrar till ansvarstagande för den egna inläringen genom att skapa en kultur av arbete. Denna kultur respekterar det egna kunnandet och andras kunnande och tillåter specifikt kunnande men också misslyckanden. Studiefärdigheterna styrs målinriktat varmed den studerande lär sig vanor som stöder inläringen i matematik. (Kompetens för välbefinnande)

I undervisningssituationer bygger vi upp en positiv, öppen och uppmuntrande atmosfär för att stöda varje studerande och för att hjälpa dem till att nå sina egna mål. En s.k. positiv drive får även svagare studerande att kämpa vidare. En trygg studiemiljö sporrar de studerande till diskussion och framställning av egna lös-

ningsmetoder samt till verbalisering av det egna tänkandet och gemensam inläring. (Kommunikativ kompetens)

I undervisningen uppmuntrar vi den studerande till att granska problem på nya sätt, till att förena saker och tillämpa matematiska metoder i olika läroämnen. En tvärvetenskaplig metod kan motivera till att lära sig nytt och kan uppmuntra till nyfikenhet och sökande av betydelse. Under studiernas gång bekantar man sig med olika metoder för kunskapshämtning och –framställning i digital tid. Vi fördjupar det målinriktade kunnandet i multilitteracitet inom matematikens område (verbal, numerisk, symbolisk, figurativ). Samtidigt lär sig den studerande att bedöma tillförlitligheten och tillämpbarheten inom olika områden för den matematiskt framställda kunskapen. (Tvärvetenskaplig och kreativ kompetens)

Studierna styr den studerande till ett utvecklande och förnyande arbetssätt i förhållande till den egna karriären och den personliga ekonomin och till en företagande attityd. Vi stöder den studerandes företagande och lär ut betydelsen av att slutföra ett arbete. Vi skapar en ”företagsvänlig” atmosfär som ger friheter men sporrar till ansvarstagande. (Samhällelig kompetens)

Genomgående i matematikundervisningen vill vi hjälpa den studerande till att förstå att hen med hjälp av matematiken kan specificera och lösa globala problem. (Etisk kompetens och miljökompetens, Global och kulturell kompetens)

MAG1

Tal och ekvationer (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- repetera principerna för procent-räkning
- kunna använda proportionalitet i problemlösning
- fördjupa kunskaperna i bråkräkning
- repetera räkneregler för potenser
- stärka sin förståelse för funktionsbegreppet
- förstå principerna för hur man löser ekvationer och ekvationspar
- lära sig använda programvara för att rita grafer till funktioner, göra tolkningar och för att lösa ekvationer.

I modulen koncentrerar vi oss på att repetera och fördjupa innehållet i det man lärt sig inom grundundervisningen. Vi fäster speciell uppmärksamhet vid förflyttningen från användningen av tal till användningen av symboler. Under modulens gång kan vi koncentrera oss på att kunna och förstärka grunderna eller på att fördjupa och utvidga dessa. Vi skapar också de studievänor som kommande studier baserar sig på och tar i bruk sådana program vi kommer att utnyttja i fortsatta studier.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att smidigt använda räknaprogram i räkneuppgifter med grundläggande räknesätt (exakt värde och närmevärde)
- lära sig spara en funktion och beräkna dess värden
- lära sig rita grafen till en funktion och ändra inställningar i koordinatsystemet enligt det situationen kräver
- lära sig rita grafen till en funktion: åskådliggöra funktionsvärdet, tecknet hos funktionen, nollställen och övriga skärningspunkter
- lära sig lösa en ekvation symboliskt (Lös-funktionen)

- lära sig lösa ett ekvationspar grafiskt och symboliskt
- bekanta sig med det elektroniska svaret i matematiken (ex. användningen av formeleditorn).

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• talmängderna och de grundläggande räkneoperationerna • motsatt tal och inverterat tal samt absolutbelopp • procenträkning • räkneregler för potenser (exponenten heltal) • direkt och omvänt proportionalitet • funktion, ritning och tolkning av grafer • lösning av förstgradsekvationer • ekvationspar • kvadratroten och kubikroten • potensfunktioner och potensekvationer (gradtalen 2 och 3)	Grundläggande beräkningar och räkneordningen. Talmängderna från naturliga tal till reella tal, tallinjen och talens storleksordning. Framställning av rationella tal som bråk, avslutade decimaltal eller periodiska decimaltal. Grundläggande räknesätten med bråk inklusive inverterade tal och potenser (där n är ett heltal). Negativ exponent och exponenten noll samt tiopotensformen för ett tal. Irrationella tal. Exakt värde och närmevärde. Kvadraten och kuben på ett tal, kvadratroten och tredjoroten av ett tal: definitionerna. (Räkneregler för kvadratrötter studeras i modul MAA2. Allmänna rotbegreppet och potensekvationer studeras i modulerna MAA2 och MAB4). Procent. Procentenhet, procentfaktor. Beräkning av grundvärdet. Jämförelse- och förändringsprocent, successiva förändringar. Vi granskar mångsidigt fenomen som har att göra med procentuella förändringar. Proportionalitet. Direkt och omvänt proportionella storheter i praktiska situationer. Formulering av ett problem till en ekvation. Att lösa en proportionalitetskvation.

Funktion. Specifiering av begreppet funktion. Variabel, funktionsvärde, funktionsuttryck och beräkning av funktionsvärdet. Beräkning av variabelvärdet. Grafen till en funktion och tolkandet av den: att bestämma nollställena algebraiskt och grafiskt samt att lägga märke till funktionens tecken. Att förena en graf med ett uttryck. (Vi studerar begreppen definitions- och värdemängd i modulerna MAA2 och MAA5.)

Ekvation och ekvationspar. Lösning av förstgradsekvationer och potensekvationerna ($n = 2, 3$). Att undersöka om ett givet tal utgör en lösning till en ekvation. Att avlägsna nämnare ur ekvationer. Lösning av ett linjärt ekvationspar både med substitutionsmetoden och additionsmetoden (elimineringsmetoden).

12345678910111213141516171819202122
232425262728293031323334353637383
940414243444546474849505152535455
565758596061626364656667686970717
273747576777879808182838485868788
8990919293949596979899100101102103
10410510610710810911011111211311411
51161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138
13914014114214314414514614714814915
01511521531541551561571581591601611
62163164165166167168169171017117217

MAA2

Funktioner och ekvationer 1 (3 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- introduceras i hur man skapar matematiska modeller av fenomen med hjälp av polynomfunktioner, rationella funktioner och rotfunktioner, känna till deras egenskaper och kunna lösa ekvationer i anknytning till dem, samt känna till sambandet mellan nollställen till en polynomfunktion och polynomets faktorer
- kunna lösa enkla polynomlikheter
- kunna använda programvara för att undersöka polynomfunktioner, rationella funktioner och rotfunktioner samt för att lösa polynomekvationer, rationella ekvationer, rotekvationer och polynomlikheter i samband med tillämpningar.

I modulen bekantar vi oss med egenskaperna hos polynomfunktioner, rationella funktioner och hos rotfunktioner. Vi studerar hur vi använder oss av dessa i beskrivningen av fenomen och inom problemlösningen.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- befästa färdigheter hen inhämtat i modul MAG1 vad gäller ekvationslösning och lösning av ett ekvationspar samt vad gäller granskning av funktioner
- lära sig förenkla uttryck och faktorisera polynom
- kunna lösa ekvationer och olikheter som hör till modulen, både grafiskt och symboliskt; kunna bestämma exakt lösning och närmevärdeslösning för en ekvation
- lära sig att undersöka, exempelvis med en glidare, hur polynomfunktionens koefficienter påverkar grafens utseende
- öva sig i att svara elektroniskt på uppgifter.

Centralt innehåll

- polynomfunktioner och -ekvationer samt polynomlikheter
- lösning av andragradsekvationer med rotformeln

Specificering av innehållet

Polynom. Förenkling av ett polynomuttryck och faktorisering av detsamma med hjälp av nollställen. Att bilda ett polynomuttryck med hjälp av nollställen och ett funktionsvärde. Binomformlerna i båda riktningarna. (Kvadratkomplettering kan behandlas först i modul MAA4.)

- produkten av polynom och binomformlerna (summan av en kvadrat, produkten av en summa och en differens)
- faktorisering av polynom
- potensfunktioner och potensekvationer (exponenten ett positivt heltal)
- rationella funktioner och ekvationer
rotfunktioner och rotekvationer

Polynomekvationer och -olikheter. Lösning av ekvationer av första och andra grad, diskriminantberäkningar. Nollregeln för en produkt. Sådana högrgradsekvationer vars lösningar bygger på nollregeln för en produkt, gruppering eller utbrytning av en gemensam faktor. Bikvadratiske ekvationer och övriga ekvationer som går att skriva om med hjälp av en andragradsekvation. Allmänna rotbegreppet och potensekvationer. Vi kan lösa en polynomlikhet exempelvis med hjälp av nollställena och en graf eller testpunkter (en polynomfunktion kan endast byta tecken i dess nollställena).

Funktioner. Typiska egenskaper hos en polynomfunktion av andra och tredje grad. Funktionens definitionsmängd (eller definitionsvillkor) och hur detta påverkar grafens utseende och lösningen av ekvationer. Räkneregler för kvadratrötter och förenkling av rotuttryck. Lösning av rotekvationer och bedömning av riktigheten för en erhållen lösning (genom kontroll eller via definitionsvillkoret och kvadreringsvillkoret). Potenser med rationell exponent och sambandet till en rot behandlas i modul MAA5. Förenkling och behandling av rationella uttryck. Enklare rationella ekvationer. Vi undersöker tecknet hos en rationell funktion i modul MAA6.

MAA3

Geometri (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att gestalta och beskriva information om rum och former i både två- och tredimensionella situationer
- kunna tillämpa likformighet, Pythagoras sats samt trigonometrin för rät- och snedvinkliga trianglar
- öva sig att formulera, motivera och använda satser som innehåller geometrisk information
- kunna använda programvara vid undersökning av figurer och kroppar samt geometrin i anknytning till dem.

Under modulens gång är det naturligt att ha den studerande att öva sig i att göra iakttagelser och söka regelbundenheter samt att ställa frågor på basis av egna upptäckter, att göra antaganden, att dra slutsatser och motivera dessa.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig undersöka egenskaper och regelbundenheter hos figurer med hjälp av ett dynamiskt geometriprogram (ex. medelpunktsvinkel och bågsvinkel i en cirkel, triangelns märkliga punkter)
- lära sig rita en modellfigur och undersöka en lösning hen fått via uträkningar
- bekanta sig med att rita enkla modellfigurer även med de program som ingår i studentprovets A-del
- lära sig lösa ett problem genom att konstruera en figur eller en kropp och med hjälp av program bestämma en vinkel, längd, area eller ett annat mått
- öva sig i att modigt använda räknarprogram när hen löser geometriproblem (bl.a. vid uträkningar, förenklingar, ekvationslösning samt bestämning av sinus-, cosinus- och tangensvärden och bestämning av en spetsig vinkel).

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• likformighet hos figurer och kroppar • sinus- och cosinussatsen • beräkning av längder, vinklar och areor i anknytning till månghörningar • geometrin för cirkeln och dess delar samt för räta linjer i anknytning till cirkeln • beräkningar av längder, areor och volymer i anknytning till raka cylindrar, koner och klot	Rätvinklig triangel. Pythagoras sats (och dess omvända sats). De trigonometriska förhållandena sinus, cosinus och tangens för en spetsig vinkel. Minnestriangelarna. (Tangensfunktionen är avlägsnad från denna modul och flyttad till modul MAA5.) Trianglar och övriga månghörningar. Månghörningars vinkelsumma. Egenskaperna för en likbent triangel och för en parallelogram. Regelbundna månghörningar. Sinus- och cosinussatsen, arean av en triangel. Figurers och kroppars likformighet. Likformighet och skala. Förhållandet mellan areor hos likformiga figurer och förhållandet mellan volymer hos likformiga kroppar. Triangelnarnas vv-likformighetssats. Bisektrissatsen för en triangel. Cirkel. Längden av periferin, en båge och en korda. Arian av en cirkel, en sektor och ett segment. Bågvinkelsatsen. Cirkelns tangent och tangentvinkelsatsen. Rymdgeometri. Namn i samband med kroppar (bl.a. kant, sidoyta, basyta, mantelyta; prisma, pyramid, tetraeder). Det räcker att den studerande behärskar uträkningar som har att göra med längd, area och volym i ett klot, en rak cylinder och en rak kon. Ytterligare ska hen kunna göra uträkningar för att ta reda på enklare vinklar i rummen (ex. vinklar som bildas inne i en kub) och göra skisser. De mer utmanande situationerna med kroppar innanför varandra kan behandlas i modul MAA10. Vi studerar vinklar i rummen mer ingående i modul MAA10.

MAA4

Analytisk geometri och vektorer (3 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- förstå hur analytisk geometri skapar samband mellan geometriska och algebraiska begrepp
- förstå den geometriska innebörden av en ekvation
- kunna lösa absolutbeloppsekvationer i formen $|f(x)| = a$ eller $|f(x)| = |g(x)|$
- förstå vektorbegreppet och sätta sig in i hur man räknar med vektorer
- kunna undersöka punkter, avstånd och vinklar i det tvådimensionella koordinatsystemet med hjälp av vektorer
- kunna lösa plangeometriska problem med hjälp av vektorer
- kunna använda programvara vid undersökning av kurvor och vektorer och vid tillämpningsuppgifter i anknytning till dem.

I modulen studerar vi geometrin i ett koordinatsystem i planet. Metoderna inom den analytiska geometrin bildar ett samband mellan geometriska och algebraiska begrepp, när en geometrisk form (punkt-mängd) anges med en ekvation. Vektorkalkylen gör metoderna inom geometrin mångsidigare och hämtar nya infallsvinklar på lösandet av geometriska problem. Man kan behandla en del av modulens centrala innehåll antingen med hjälp av analytisk geometri eller vektorkalkyl. Rymdvektorer, linjer i rymden och plan tas upp i modul MAA10.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna rita olika kurvor i planet och åskådliggöra en kurvskara med exempelvis en glidare
- kunna lösa ett ekvationssystem symboliskt (ex. att bilda uttrycket för en parabel med hjälp av givna punkter)
- lära sig lösa en absolutbeloppsekvation grafiskt och symboliskt samt åskådliggöra vad kurvorna $y = f(x)$ och $y = |f(x)|$ har att göra med varandra
- öva sig i att smidigheten att rita en modellfigur och kontrollen av en erhållit uträknat svar
- lära sig rita vektorer och utföra vektorkalkylberäkningar (addition, multiplikation mellan ett tal och en vektor, vek-

torns längd, enhetsvektor, punktprodukt och vinkeln mellan två vektorer) symboliskt.

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• ekvationen för en kurva • ekvationerna för en rät linje, cirkel och parabel • ekvationssystem • parallella och ortogonala linjer • absolutbeloppsekvation • avståndet från en punkt till en linje • grundläggande egenskaper hos vektorer • addition och subtraktion av vektorer i planet samt multiplikation av en vektor med ett tal i planet • skalär produkt och vinkeln mellan två vektorer i planet	Ekvationen för en kurva. Punkt, linje, cirkel och parabel i det kartesiska koordinatsystemet. De punkter i xy-planet som satisfierar ekvationen bildar en kurva i xy-planet. Ekvationen för en linje och en cirkel (olika former). Kvadratkomplettering i samband med cirkelns och parabelns ekvationer. Cirkelns tangenter. En parabel vars axel är parallell med en koordinataxel. Brännpunkt och styrlinje. Olika former av parabelns ekvation (nollställeformen och toppformen). Ekvationspar och olika metoder för att bestämma skärningspunkter (två linjer, linje och cirkel, parabel och linje osv.) Lösningssystemet för ett linjärt ekvationssystem. Absolutbelopp. Definitionen av absolutbelopp och ekvationer vars lösning baserar sig på definitionen. (Kvadreringsmetoden kan visas men olikheter med absolutbelopp har tagit bort från läroplansinnehållet.) Grundegenskaper hos vektorer. Vektorer har längd och riktning; en vektor är ett objekt som uttrycker en förflyttning (en viss längd i en viss riktning). Nollvektorn. Motsatt vektor. Parallella och lika riktade vektorer, motsatt riktade vektorer, vinkelräta vektorer; beteckningar som anknyter sig till dessa. Vektorns längd, enhetsvektor i en given vektors riktning, vinkeln mellan vektorer.

Vektorer. Tyngdpunkten ligger i att studera vektorer i xy -planet. En vektors uppdelning i koordinatsystemet med hjälp av komponenter i x - och y -riktning (basvektorer i och j). Vi kan förbigå begreppet allmän bas. Parallella och vinkelräta linjer riktningsvinkel och vinkeln mellan två linjer kan behandlas med hjälp av metoder i analytisk geometri (med hjälp av riktningskoefficienten) eller med hjälp av vektorer (parallella vektorer, punktprodukt).

12345678910111213141516171819202122
 232425262728293031323334353637383
 940414243444546474849505152535455
 565758596061626364656667686970717
 273747576777879808182838485868788
 8990919293949596979899100101102103
 10410510610710810911011111211311411
 51161171181191201211221231241251261
 27128129130131132133134135136137138
 13914014114214314414514614714814915
 01511521531541551561571581591601611
 6216316416516616716816917017117217

MAA5

Funktioner och ekvationer 2 (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- introduceras i hur man skapar matematiska modeller med hjälp av sinus- och cosinusfunktioner samt med exponential- och logaritmfunktioner
- undersöka sinus- och cosinusfunktioner med hjälp av symmetrier i enhetscirkeln
- kunna lösa trigonometriska ekvationer av typen $\sin f(x) = a$ eller $\sin f(x) = \sin g(x)$
- kunna tillämpa sambandet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ mellan sinus- och cosinusfunktionerna
- känna till egenskaperna hos exponential- och logaritmfunktioner och kunna lösa ekvationer i anknytning till dem
- kunna använda programvara vid undersökning av funktioner, vid ekvationslösning och i tillämpningssuppgifter.

Modulen kompletterar de iakttagelser vi gjorde i MAA2 när vi bekantar oss med egenskaperna för sinus- och cosinusfunktionen samt exponential- och logaritmfunktionen. Vi studerar även hur dessa kan användas för att åskådliggöra fenomen och inom problemlösningen. Modulen ger möjligheter till att använda program mångsidigt bl.a. när vi skisserar grafer, gör modeller och löser ekvationer.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna rita enhetscirkeln, en riktad vinkel och en båginkel samt undersöka dessa (ex. via symmetrier)
- kunna lösa ekvationer som hör till modulen samt visa på periodiciteten i trigonometriska ekvationer
- kunna undersöka, ex. med hjälp av en glidare, hur koefficienter i funktionsuttrycket för funktioner som hör till modulen påverkar grafen till funktionen
- kunna anpassa exempelvis en sinusfunktion och en exponentialfunktion till en given punktmängd när man vill göra en modell av något fenomen.

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• riktad vinkel och radianer • enhetscirkeln • sinus- och cosinusfunktionen med symmetri- och perioditetsgenskaper • lösning av sinus- och cosinusekvationer • potenser med bråkexponent och deras samband med rötter • exponentialfunktioner och exponentialekvationer • logaritm och räkneregler för logaritmer • logaritmfunktioner och logaritmekvationer	Trigonometriska funktioner. Sinus- och cosinusfunktionen (tangensfunktionen har tagits bort från innehållet; tangens behandlas dock ännu i samband med den rätvinkliga triangelns sidoförhållanden i modulen MAA3). Värdemängd, symmetri och periodicitet samt grundegenskaperna för graferna. Lösning av enklare trigonometriska ekvationer. Modellering av periodiska fenomen. Exponentialfunktioner. Generalisering av potensbegreppet till att gälla rationella och reella exponenter (när basen är ett positivt tal). Graftyper. Åskådliggörandet av exponentiell ökning och minskning, halveringstid. (Nepers tal och den naturliga logaritmen behandlas i modul MAA6.) Logaritmfunktioner. Sambandet mellan en logaritm och en exponentialfunktion och den allmänna definitionen av en logaritm. Lösning av exponential- och logaritmekvationer. Logaritmfunktionens definitionsmängd och grundegenskaperna för graferna.

MAA6

Derivata (3 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- med hjälp av derivatan bekanta sig med egenskaperna hos matematiska modeller för olika fenomen
- få en åskådlig uppfattning om en funktions gränsvärde och kontinuitet
- förstå tolkningen av derivatan som förändringshastigheten för en funktion
- kunna bestämma derivatan av enkla funktioner
- kunna derivera sammansatta funktioner
- behärska hur man undersöker förloppet hos funktioner med hjälp av derivatan och hur man bestämmer deras extremvärden i ett slutet intervall
- kunna använda programvara vid undersökning av gränsvärde, kontinuitet och derivata i samband med tillämpningar.

Det centrala målet i modulen är att handleda den studerande till att förstå begreppet derivata som ett mått på förändringshastighet, att skissera sambandet mellan en funktion och dess derivatafunktion samt att den studerande får öva sig i att använda derivata mångsidigt i undersökningen av funktioner och i lösandet av extremvärdesproblem. Vi studerar kontinuitet och deriverbarhet närmare (bl.a. diskontinuerliga funktioner) i modul MAA12.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att behandla uttryck smidigt (förenklingar och beräkningar av värdet för ett uttryck) bl.a. när hen behandlar uttrycket för en differenskvot
- lära sig undersöka gränsvärden t.ex. med hjälp av tabeller eller grafer
- lära sig bestämma gränsvärden
- lära sig rita en tangent och en sekant (dynamiskt) för en graf till en funktion, bestämma riktningskoefficienten (grafisk derivering)
- kunna åskådliggöra derivatans tecken och monotoniteten hos en funktion (och dess derivatafunktion) via grafen
- lära sig derivera en funktion, beräkna derivatans värde och derivatans nollställen symboliskt

- uppmuntras till att utnyttja räknarprogram i deriveringen, ekvationslösningen och beräkningen av värdet hos en funktion i tillämpningsuppgifter.

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• en funktions gränsvärde, kontinuitet och derivata • derivering av polynomfunktioner, rationella funktioner och rotfunktioner • derivering av sinus- och cosinusfunktioner samt av exponential- och logaritmfunktioner • derivator av produkter och kvoter av funktioner • sammansatta funktioner och deras derivator • undersökning av förloppet hos en funktion och bestämning av extremvärden	Gränsvärde och kontinuitet. Gränsvärdesberäkningar och kontinuitetsundersökningar i situationer där vi inte behöver ensidiga gränsvärden (ex. gränsvärdet för en rationell funktion och utvidgning till en kontinuerlig funktion i situationen $\frac{0}{0}$). Kontinuitet vid $x = a$ och i intervallet $]a, b[$. Derivata. Funktionens genomsnittliga förändringshastighet och momentana förändringshastighet, differenskvot och derivatan av den funktion som gränsvärdet för en differenskvot. Derivatafunktionen. Derivering av de elementära funktioner vi studerat i tidigare moduler (inklusive kedjeregeln i enkla situationer). Tangent och normal till en kurva. Nepers tal och den naturliga logaritmen. Förloppet av en funktion. Definitionerna för växande och avtagande funktioner. Undersökning av förloppet (växande/avtagande/monotonitet) hos en funktion samt bestämning av lokala extremvärden med hjälp av derivatans nollställen och tecken (vi kan bestämma derivatans tecken med hjälp av graftypen eller testpunkter). Vi kan göra teckenundersökning för derivatan av en rationell funktion med hjälp av nollställen, definitionsvillkor eller testpunkter (en rationell funktion kan byta tecken endast i sina nollställen eller i ställen där den är odefinierad). Entydigheten i existensen av rötterna hos en ekvation

(Bolzanos sats). Största och minsta värdet för en kontinuerlig funktion i ett slutet intervall.

Extremvärdestillämpningar. Att bilda en funktion inklusive dess definitionsvillkor för att beskriva en situation. Att bestämma extremställena algebraiskt ur derivatans nollställena. Största/minsta värde i ett slutet intervall eller med hänvisning till funktionens förlopp: vi kan avgöra växandet/avtagandet hos en funktion med hjälp av dess graf.

Vi studerar extremvärdestillämpningar i rymdgeometri i modul MAA10 och behandlar styckvis definierade funktioner samt gränsvärden i oändligheten i modul MAA12.

12345678910111213141516171819202122
232425262728293031323334353637383
940414243444546474849505152535455
565758596061626364656667686970717
273747576777879808182838485868788
8990919293949596979899100101102103
10410510610710810911011111211311411
51161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138
13914014114214314414514614714814915
01511521531541551561571581591601611
6216316416516616716816917017117217

MAA7

Integralkalkyl (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- förstå begreppet primitiv funktion och lära sig att bestämma primitiva funktioner till enkla funktioner
- förstå begreppet integral och dess samband med arean samt introduceras i hur man bestämmer en integral med en numerisk metod
- kunna bestämma areor och volymer med hjälp av integraler
- göra sig förtrogen med integralkalkylens tillämpningar
- kunna använda programvara då hen undersöker egenskaperna hos funktioner, bestämmer primitiva funktioner, beräknar integraler i samband med tillämpningar och integrerar numeriskt.

Det centrala målet för modulen är att den studerande ska förstå grundbegreppen inom integralkalkylen: primitiv funktion och integral, och förstå sambandet mellan dessa samt bekanta sig med några tillämpningar i integralkalkyl. Kontinuerliga fördelningar (vilka har att göra med integralkalkyl) behandlar vi i modul MAA12.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna rita en area enligt den givna informationen
- kunna bedöma areans storlek dynamiskt (iden ur definitionen av begreppet bestämd integral) med hjälp av under- och översummor
- kunna integrera en funktion och beräkna värdet av en integral (exakt värde och närmevärde)
- kunna åskådliggöra, exempelvis med en glidare, hur integrationskonstanten C påverkar grafen till in primitiv funktion
- bekanta sig med hur man åskådliggör en rotationskropp
- bekanta sig med metoder med vilkas hjälp vi kan beräkna värdet av integraler numeriskt, exempelvis rektangelmetoden.

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• primitiv funktion och integrering av de viktigaste elementära funktionerna • integraler • rektangelmetoden • beräkning av areor och volymer	Integreringsmetoder. Integrering av elementärfunktioner vi bekantat oss med i tidigare moduler, inklusive integrering av en sammansatt funktion (som baserar sig på derivering av en sammansatt funktion (kedjeregeln) i enklare situationer. Vi kan utvidga arsenalen av integreringsmetoder i modul MAA12. Begreppet (bestämd) integral. Idén med definitionen av begreppet integral sett ur rektangelmetodens perspektiv. Att beräkna värdet av en integral med hjälp av en primitiv funktion (analysens huvudsats). Att beräkna värdet av en integral numeriskt (närmevärde) med hjälp av rektangelmetoden. Tillämpningar inom integralkalkylen. Sambandet mellan integral, area och volym. Beräkning av area och volym. Vi bekantar oss med tillämpningar inom integralkalkylen, exempelvis beräkning av mängd med utgångspunkt ur begreppet förändringshastighet. Vi kan utvidga tillämpningar inom integralkalkylens område i modul MAA12.

MAA8

Statistik och sannolikhet (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna åskådliggöra en diskret statistisk fördelning samt bestämma och tolka fördelningens nyckeltal
- kunna åskådliggöra en fördelning som består av två variabler samt bestämma korrelationskoefficienten och regressionskurvan
- sätta sig in i kombinatoriska metoder
- göra sig förtrogen med begreppet sannolikhet och räkneregler
- förstå begreppet diskret sannolikhetsfördelning och lära sig bestämma väntevärdet för en fördelning samt tolka det
- kunna använda programvara för att hämta, behandla och undersöka data i digitalt format samt för att presentera statistisk information
- kunna använda programvara för att konkretisera fördelningar, bestämma nyckeltal samt beräkna sannolikheter.

I denna modul har statistiken fått mer utrymme än tidigare då man skurit bort en del ur sannolikhetsläran. Som nytt innehåll har vi korrelation och linjär regression. Kontinuerliga sannolikhetsfördelningar (såsom normalfördelning) har flyttats till modul MAA12

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att använda tabellkalkylprogram smidigt, exempelvis cellreferenser, klassificering/ ordning och filtrering (dvs. att urskilja väsentlig information)
- övar sig i att behandla ett statistiskt material smidigt: kunna sammanfatta kunskap med hjälp av tabellering och bestämma karaktäristikor samt åskådliggöra statistik med olika diagram
- lära sig rita ett spridningsdiagram, anpassa en regressionslinje samt bestämma korrelationskoefficienten
- lära sig beräkna permutationer och kombinationer
- lära sig rita grafen till en binomialfördelning, bestämma fördelningens karaktäristikor samt bestämma sannolikheter och lösa problem i en omvänd riktning
- bekanta sig med hur man tar reda på aktuell statistik och hur man gör upp relevant statistik med hänvisning till nätkällor samt bekanta sig med hanteringen, åskådliggörandet och analysen av information

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• lägesmått och standardavvikelse • korrelation och linjär regression • klassisk och statistisk sannolikhet • permutationer och kombinationer • räkneregler för sannolikhet • binomialfördelning • diskret sannolikhetsfördelning • väntevärdet för en diskret fördelning	Statistik. Grundmängd och sampel. Vi kan begränsa oss till att studera diskreta statistiska variabler. Frekvenstabeller och statistisk sannolikhet. Karaktäristikor i statistik: variationsintervall, centralmått (modus, median, medelvärde) och standardavvikelse (standardavvikelse för sampel). Att förstå beräkningsiden för karaktäristikorna. Statistiska diagram som cirkeldiagram, stolp- och stapeldiagram samt grafen till den kumulerade frekvensen (linjediagram). Simultan fördelning (för två variabler): beroende och oberoende variabel, spridningsdiagram, att åskådliggöra det linjära beroendet i ett spridningsdiagram. Regressionslinje och korrelationskoefficient. Prognoser med hjälp av en regressionsmodell. Sannolikhet. Klassisk sannolikhet och beräkningsmetoder för antalet elementarhändelser (porduktprincipen, permutationer och kombinationer). Multiplikationsregeln för oberoende händelser och den allmänna multiplikationsregeln. Additionsregeln för disjunkta händelser och den allmänna additionsregeln. Komplementregeln. Användningen av Venn-diagram för att åskådliggöra räkneregler. Upprepade försök och binomialsannolikhet. Diskret sannolikhetsfördelning. Stokastiska variabel och punktsannolikhet. Väntevärdet för en fördelning och tolkning av väntevärdet. Upprepade försök, binomialfördelning och väntevärde för binomialfördelning.

MAA9

Ekonomisk matematik (1 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig använda sina matematiska färdigheter för att beräkna tillräckligheten hos resurser, för ekonomisk planering, företagande och beräkning av lönsamhet
- tillämpa formler för talföljder i matematiska problem som anknyter till ekonomi
- lära sig att anpassa matematiska modeller i ekonomiska situationer och förstå deras begränsningar
- kunna använda programvara vid beräkningar och i samband med tillämpningar.

Modulen är identisk med modulen MAB7, vilket möjliggör byggandet av studieavsnitt med den ekonomiska modulen SH2 i samhällslära. Man kan förena modulen SH2 med moduler i ekonomisk matematik både ur den långa och den korta matematikens pensum. Det är möjligt att bilda ett gemensamt studieavsnitt av alla dessa tre moduler eller alternativt två skilda studieavsnitt: SH2+MAB7 eller SH2+MAA9.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig att utnyttja symbolisk kalkyl i beräkningar inom ekonomisk matematik, ex. i samband med ett annuitetslån
- lära sig utföra beräkningar som har med talföljder att göra: ex. spara en talföljd som en funktion $f(n)$, beräkna element i talföljden och lösa ekvationer
- lära sig göra låneberäkningar (ex. med hjälp av ett tabellkalkylprogram)
- bekanta sig med olika räknare på nätet (ex. vad gäller koldioxidspår).

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• aritmetisk och geometrisk talföljd och deras summor • ränteräkning: ränta på ränta, nuvärde och diskontering • depositioner och lån • matematiska modeller anpassade för ekonomiska situationer där talföljder och summor används	Talföljder. Vi begränsar oss till aritmetiska och geometriska talföljder och summor. Som tillämpningar betraktar vi ex. successiva depositioner (såsom kontoinsättningar) samt helhetsvärdet av depositioner. Vid sidan av ekonomiska tillämpningar kan vi exempelvis studera kalkyler som hänför sig till ekologiska resurser (såsom tillgången till fossila bränslet olja, mat och rent vatten). Räntekalkyl. När vi beräkna ränta på ränta studerar vi olika allmänna sätt att beräkna räntetid, avrunda resultat osv. Ränta på ränta och diskontering som metoder: ökat kapital, nuvärdet av betalningar gjorda vid olika tidpunkter. Lån. Grundbegrepp (lånekapital, amortering, återbetalningsrat osv.). Olika lånetyper (bostadslån, studielån, konsumtionslån, snabblån) och principer för återbetalning av dessa (lån med fast amortering, annuitetslån, fast annuitetslån) samt låneskötsel (beräkning av amorteringens, räntans och det kvarvarande lånets storlekar i de olika lånetyperna, och jämförelse av olika lånetyper).

MAA10

3D-geometri (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- fördjupa sina kunskaper i räkning med vektorer och lära sig att använda vektorer i ett tredimensionellt koordinatsystem
- lära sig att undersöka punkter, rätta linjer och plan i xyz-koordinatsystemet med hjälp av vektorer
- stärka sina kunskaper om rymdgeometri i samband med extremvärdesuppgifter
- bekanta sig med funktioner som har två variabler
- kunna använda programvara för att åskådliggöra vektorer, linjer, plan och ytor samt i räkning med vektorer.

I modulen kompletterar vi innehållet i rymdgeometri och vektorkalkyl och bekantar oss med linjer, plan och ytor i xyz-rymden.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna rita punkter, linjer, plan och ytor i rymden
- kunna beräkna punktprodukt och kryssprodukt av vektorer
- kunna lösa ett linjärt ekvationssystem symboliskt och grafiskt
- kunna utnyttja program vid extremvärdeställningar (derivering, bestämning av nollställen, åskådliggörande av funktioners förlopp)
- lära sig rita och åskådliggöra grafen till en funktion med två variabler, beräkna funktionsvärden för dessa funktioner samt åskådliggöra kurvor med konstant värde).

Centralt innehåll

- vektorframställning i ett tredimensionellt koordinatsystem
- skalär produkt och vektorprodukt

Specificering av innehållet

Vektorer. Vektorer i xyz-rymden. Linjens riktningsvektor och linjens ekvation i parameterform. Planets riktningsvektorer och normalvektor. Beräkning av kryssprodukt med och utan program. (Tyngdpunkten ligger dock här på tillämpningar med

- punkt, rät linje och plan i rymden
- en vinkel i rymden
- differential- och integralkalkylens rymdgeometrisk tillämpningar i situationer där funktionsuttrycken innehåller en variabel
- funktioner med två variabler och ytor i rymden

kryssprodukt, ex. att bestämma normalvektorn för ett plan, där vi kan beräkna kryssprodukten med ett program). Vinkelberäkningar med hjälp av vektorer.

Rymdkroppar och extremvärdestillämpningar. Mera utmanande situationer med kroppar innanför varandra samt extremvärdestillämpningar som har att göra med rymdkroppar (deriveringar).

Funktion med två variabler. Funktioner som får reella värden. Att rita en graf och tolka denna. Att hitta den kritiska punkten på en graf. Funktionsvärde och kurva med konstant värde.

12345678910111213141516171819202122
232425262728293031323334353637383
940414243444546474849505152535455
565758596061626364656667686970717
273747576777879808182838485868788
8990919293949596979899100101102103
10410510610710810911011111211311411
51161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138
13914014114214314414514614714814915
01511521531541551561571581591601611
6216316416516616716816917017117217

MAA11

Algoritmer och talteori (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- veta vad en algoritm är, samt lära sig att undersöka hur en algoritm fungerar
- lära sig att utföra enkla algoritmer genom programmering
- bli insatt i logikens begrepp
- behärska grundbegrepp i talteorin och göra sig förtrogen med primtalens egenskaper
- kunna undersöka delbarheten hos hela tal.

Programfärdigheter

I modulen använder vi programmering som hjälpmedel för att undersöka egenskaper hos tal och olika algoritmer. Det centrala målet är att förstå helheter och att väcka intresse.

Exempelvis: Gör ett program som

- skriver ut delningsekvationen för talen a och b
- skriver ut de etthundra minsta positiva elementen i a mod n
- med successiva divisioner med $2, 3, 4, \dots$
 $\sqrt{n}$ undersöker huruvida n är ett primtal.

Genom programmering kan vi ytterligare lösa exempelvis följande problem:

- beräkna närmevärdet av en kvadratrots
- bestämma nollstället för en funktion med halveringsmetoden
- bestämma lösningen till en ekvation med Newtons metod
- göra en primtalsundersökning med Monte-Carlo metoden.

Centralt innehåll

- grundbegrepp i algoritmiskt tänkande: sekvens, val och upprepning
- flödesdiagram

Specificering av innehållet

Logik. Konnektiven ”och, eller och negation” samt enklare sanningstabeller. Bevisföring behandlas inte som ett specifikt innehåll.

- programmering av enkla algoritmer, sorteringsalgoritmer eller en algoritm som anknyter till numerisk lösning av en ekvation
- konnektiv och sanningsvärden
- delbarhet hos hela tal, delbarhetsekvationen (delningsekvationen) och kongruens
- Euklides algoritm
- aritmetikens grundsats

Programmering. Vi programmerar med något programmeringsspråk, exempelvis Python. Vi kan inte här nå målet för läroplanen genom att enbart använda tabellkalkyl.

12345678910111213141516171819202122
232425262728293031323334353637383
940414243444546474849505152535455
565758596061626364656667686970717
273847576777879808182838485868788
8990919293949596979899100101102103
10410510610710810911011111211311411
51161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138
13914014114214314414514614714814915
01511521531541551561571581591601611
6216316416516616716816917017117217

MAA12

Analys och kontinuerlig fördelning (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- fördjupa sin förståelse för analysens grundbegrepp
- kunna bilda och undersöka inversa funktioner till strängt monotona funktioner
- komplettera sina färdigheter i integralkalkyl
- göra sig förtrogen med begreppet kontinuerlig sannolikhetsfördelning och lära sig tillämpa normalfördelning
- kunna använda programvara vid undersökning av funktioners egenskaper och vid beräkning av generaliserade integraler i samband med tillämpningar.

I modulen fördjupar vi begreppskunskan och metoder i analys.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig rita en styckvis definierad funktion
- kunna undersöka kontinuiteten och deriverbarheten hos funktioner både med hjälp av grafen och algebraiskt
- kunna bestämma gränsvärden (även i oändligheten)
- lära sig att bestämma uttrycket för en invers funktion (med hjälp av ekvationen) och bestämma definitionsmängden för den inversa funktionen
- kunna beräkna oegentliga integraler med hjälp av gränsvärden
- lära sig rita figurer över som berör normalfördelning
- lära sig bestämma sannolikheter som har att göra med normalfördelning och hantera den omvända situationen, lära sig bestämma väntevärde och standardavvikelse symboliskt i situationer som inte kräver normering

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• styckvis definierad funktion • undersökning av kontinuitet och deriverbarhet för en funktion • allmänna egenskaper hos kontinuerliga och deriverbara funktioner • invers funktion • gränsvärde av funktioner när variabelns värde går mot oändligheten • generaliserade integraler • kontinuerliga fördelningar, normalfördelningen och normering	Analysens grundbegrepp. Vi repeterar och fördjupar analysbegrepp ur moduler-na MAA6 och MAA7: funktionens definitions- mängd och värdemängd, gränsvärde, kontinuitet och deriverbarhet, derivata och derivatafunktion, primitiv funktion och integral. Ensidigt gränsvärde och derivata och ensidig derivata. Exempel på diskontinuerliga funktioner och funktioner som är kontinuerliga men inte deriverbara (ex. absolutbeloppsfunktioner). I modulen kan vi fördjupa och utvidga derivataundersökningar (bl.a. med andraderivatan) eller integreringsmetoder eller bekanta oss med tillämpningar för integraler (bl.a. längden av en kurva, mantelytan av en rotationskropp, medelvärde för en funktion). Allmänna egenskaper hos kontinuerliga funktioner. Elementarfunktionerna och absolutbeloppsfunktionen, vilka ingår i gymnasiestudierna, är kontinuerliga i sina egna definitions- mängder. Bolzanos sats: för en kontinuerlig funktion finns det ett minst nollställe i ett intervall mellan funktionsvärden av olika tecken. En kontinuerlig funktion kan alltså byta tecken endast i ett nollställe (eller ett ställe där den är odefinierad). I ett slutet intervall antar en kontinuerlig funktion sitt största och sitt minsta värde antingen i derivatans nollställen eller i ändpunkterna till intervallet. Allmänna egenskaper hos deriverbara funktioner. Elementarfunktionerna och absolutbeloppsfunktionen, vilka ingår i gymnasiestudierna, är deriverbara i sina egna definitions- mängder (förutom rotfunktioner och absolutbeloppsfunktionen vid $x = 0$). En deriverbar funktion är kontinuerlig men en kontinuerlig funktion är

inte nödvändigtvis deriverbar. Sambandet mellan derivatans tecken och förloppet och extremvärden hos en funktion (inkl. undersökning av monotonitet). Tillämpningar är exempelvis existensen av och antalet rötter hos en ekvation samt undersökning av olikheter.

Invers funktion. Existensvillkor: bijektion. Ex. en strängt monoton funktion har en invers funktion. Definitions- och värdemängd. Bestämning av uttrycket. Grafen till funktionen och dess inversa funktion är varandras spegelfunktioner i linjen $y = x$ (varav följer att deras derivator i motsvarande punkter är varandras inverterade tal).

Gränsvärde och oegentlig integral.

Gränsvärden i oändligheten och gränsvärdet "oändligt". Tillämpningar är ex. asymptoter (lodräta och vågräta) och värdemängden för en rationell funktion. Att bestämma gränsvärden algebraiskt (förkortningar och förenklingar, ex.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

Definitionen av en oegentlig integral som ett gränsvärde: de fall där integrationsintervallet är obegränsat eller där funktionens värdemängd är obegränsad.

Kontinuerliga fördelningar. Täthetsfunktion och fördelningsfunktion. Att bestämma sannolikheter och väntevärdet med hjälp av integralkalkyl (program). Att känna till grundegenskaperna (ex. symmetrier) för normalfördelning samt exempel av användning av normalfördelning i praktiken. Principen för normering och jämförelse av olika normalfördelningar. Sambandet mellan binomialfördelning och normalfördelning via exempel.