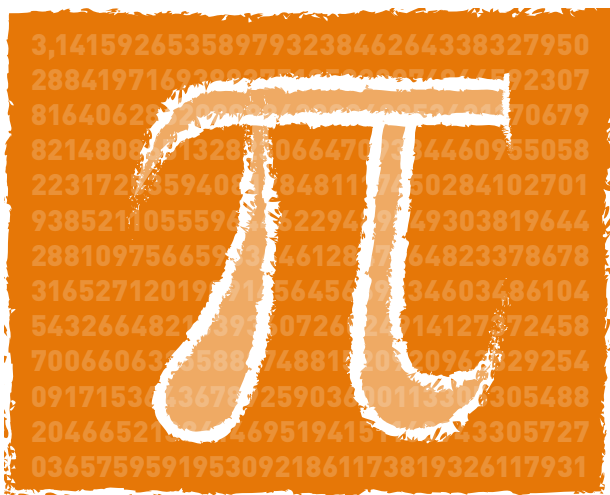


Stödmaterial i kort matematik

Grunderna för gymnasiets läroplan 2019 -
Granskning av innehållet av modulerna i kort matematik



Representanter för Riksförbundet för lärare i matematiska ämnen,
MAOL r.f., och medlemmar som deltagit i läroämnesgruppen för
uppgörandet av Grunderna för gymnasiets läroplan 2019
har tillsammans producerat stödmaterial för att
öppna upp de centrala innehållen i modulerna i kort matematik.

INNEHÅLL

Obligatoriska studier

MAG1 Tal och ekvationer 9

MAB2 Uttryck och ekvationer 12

MAB3 Geometri 14

MAB4 Matematiska modeller 16

MAB5 Statistik och sannolikhet 18

MAB6 Grunder i ekonomisk matematik 21

MAB7 Ekonomisk matematik 23

Nationella valfria studier

MAB8 Matematisk analys 25

MAB9 Statistik- och sannolikhetsfördelningar 27

Vi tackar följande för understödet:



Teknologiateollisuuden
100-vuotissäätiö



SVENSKA FOLKSKOLANS VÄNNER

This event is supported by the European Commission's H2020 programme – project Scientix 3 (Grant agreement N. 730009), coordinated by European Schoolnet (EUN). The event is the sole responsibility of the organizer and it does not represent the opinion of the European Commission (EC) or EUN, and neither the EC or EUN are responsible for any use that might be made of information contained.

INLEDNING

Detta material som är avsett till att stöda det lokala läroplansarbetet i matematik har gjorts i samarbete med arbetsgruppen för uppgörandet av läroplanen i gymnasiets matematik vid Utbildningsstyrelsen och Riksförbundet för lärare i matematiska ämnen MAOL r.f. Materialet ska precisera och öppna den vanligen rätt normativa framställningen av grunderna för läroplanen. Vi hoppas och tror att det ska klargöra arbetsgruppens tankar kring begränsningen av de centrala innehållen och att det ska hämta nya synvinklar på planeringen av undervisningen. Stödmaterialet är inte bindande utan de föreslagna förverkligande metoderna och exemplen är riktgivande.

I de nya grunderna för gymnasiets läroplan har man beskrivit den mångsidiga kompetensen allmänt och läroämnesspecifikt. I de lokala läroplanerna är det meningen att skolorna ska skriva in hur målen för denna mångsidiga kompetens ska förverkligas i de olika studieavsnitten. Stödmaterialet öppnar upp hur det mångsidiga kompetenstänkandet kunde synas i matematikundervisningen. På grund av matematikens natur ser det ut som om man bäst kan förverkliga områdena för den mångsidiga kompetensen i de olika studieavsnitten genom att i varje situation betona en specifik mångsidig kompetens.

De nya grunderna för gymnasiets läroplan förutsätter att den studerande i matematikstudierna utvecklar sitt kunnande i att utnyttja datorprogramvara och digitala kunskapskällor vid inläring, undersökning och problemlösning samt bedömer nyttan av användning av datatekniska hjälpmedel och begränsning av användandet av dessa. I detta stödmaterial framläggs hur man kunde utveckla den studerandes programfärdigheter under studiernas gång och vilka färdigheter som önskas. Man förbättrar programfärdigheterna stegvis genom att lägga till användning av dem i det innehåll som behandlas i ett visst studieavsnitt. Ett centralt mål är att den studerande övar sig i att använda olika program fiffigt och att hen i varje situation kan använda det hjälpmedel (bl.a. tabellkalkyl, symbolisk kalkyl, geometriprogram) som lämpar sig bäst för situationen.

I samband med beskrivningen av programfärdigheterna i detta stödmaterial används ord som *bekanta sig med*, *lära sig*, *kunna* och *öva sig i att* i följande betydelse:

Bekanta sig med. Den studerande möter eventuellt färdigheten för första gången och lär sig denna eventuellt i fortsatta studier. Vid detta skede av studierna kan målet exempelvis vara att väcka intresse för saken.

Lära sig. Den studerande övar (eventuellt) färdigheten för första gången.

Kunna. Färdigheter som inlärts i tidigare studier utvecklas eventuellt i en ny situation.

Öva sig i att. Färdigheten har övats och övas frekvent varmed kunnandet blir en rutin.

MÅNGSIDIG KOMPETENS I MATEMATIK

I undervisningen ska man undersöka sambanden mellan matematiken och vardagslivet och utnyttja möjligheterna att stärka den studerandes intresse, självförtroende och informationssökningsprocesser samt uppmuntra den studerande att experimentera och arbeta med uthållighet. De färdigheter som den studerande utvecklar tillämpas då hen ställer upp egna mål och fattar beslut. Den studerande ska även reflektera över hur färdigheterna i matematik kan användas för hållbar utveckling och för att lösa problem som berör mänskligheten. På det här sättet stärks den studerandes samhällseliga kompetens, etiska kompetens och miljökompetens samt kompetens för välbefinnande.

Undervisningen tar avstamp i sådana teman och fenomen samt tillhörande problem som intresserar de studerande och som kan lösas med hjälp av matematik. I undervisningen används varierande arbetssätt där den studerande arbetar på egen hand eller i grupp. På det sättet stärks bland annat den studerandes kommunikativa kompetens. Arbetssätten väljs tillsammans med

de studerande. Undervisningen planeras så att de studerande utifrån sina egna observationer stimuleras till att ställa frågor, framlägga hypoteser, dra slutsatser och motivera dessa.

Studierna i matematik stödjer målen för global och kulturell kompetens samt tvärvetenskaplig och kreativ kompetens. Den studerande ska vägledas att förstå matematikens betydelse i olika kulturer och den historiska utvecklingen samt dess karaktär som ett universellt språk. Den studerande ska vägledas till insikt om de matematiska begreppens innebörd och lära sig känna igen hur de hänger samman med större helheter, både inom matematiken och inom andra läroämnen. Den studerande uppmuntras att använda ett matematiskt språk och matematiska tecken samt bilder, figurer och redskap som stödjer det matematiska tänkandet. Den studerande ska få hjälp att utveckla sin förmåga att växla mellan olika sätt att framställa matematisk information när hen ska skapa modeller av fenomen, förstå och lösa problem samt diskutera resultatet.

UTVECKLANDET AV FÄRDIGHETERNA I MÅNGSIDIG KOMPETENS I MATEMATIK

I grunderna för gymnasiets läroplan har man beskrivit hur de olika områdena inom den mångsidiga kompetensen ingår i matematikstudierna och de finns även nedtecknade i målen för studierna i matematik. I den

lokala läroplanen kompletterar vi de mångsidiga kompetensfärdigheterna och konkretiserar dessa för matematikens del. Ytterligare definierar vi hur målen för de olika delområdena förverkligas i respektive studieavsnitt.

I matematikstudierna närmar vi oss den mångsidiga kompetensen med utgångspunkt i vetenskaperna. Mångsidigheten kan synas i matematikundervisningen exempelvis på följande sätt:

Vi handleder den studerande till att målriktigt identifiera och utnyttja sina egna styrkor och å andra sidan till att lägga märke till att framgång i matematik innebär långsiktigt arbete, uthållighet och tålamod. I undervisningen stöder vi tålandet av osäkerhet och förstärker tilliten. Detta leder till att den studerande lär sig att bedöma sina egna resurser och tidsanvändning. Vi uppmuntrar till ansvarstagande för den egna inläringen genom att skapa en kultur av arbete. Denna kultur respekterar det egna kunnandet och andras kunnande och tillåter specifikt kunnande men också misslyckanden. Studiefärdigheterna styrs målinriktat varmed den studerande lär sig vanor som stöder inläringen i matematik. (Kompetens för välbefinnande)

I undervisningssituationer bygger vi upp en positiv, öppen och uppmuntrande atmosfär för att stöda varje studerande och för att hjälpa dem till att nå sina egna mål. En s.k. positiv drive får även svagare studerande att kämpa vidare. En trygg studiemiljö sporrar de studerande till diskussion och framställning av egna lös-

ningsmetoder samt till verbalisering av det egna tänkandet och gemensam inläring. (Kommunikativ kompetens)

I undervisningen uppmuntrar vi den studerande till att granska problem på nya sätt, till att förena saker och tillämpa matematiska metoder i olika läroämnen. En tvärvetenskaplig metod kan motivera till att lära sig nytt och kan uppmuntra till nyfikenhet och sökande av betydelse. Under studiernas gång bekantar man sig med olika metoder för kunskapshämtning och –framställning i digital tid. Vi fördjupar det målinriktade kunnandet i multilitteracitet inom matematikens område (verbal, numerisk, symbolisk, figurativ). Samtidigt lär sig den studerande att bedöma tillförlitligheten och tillämpbarheten inom olika områden för den matematiskt framställda kunskapen. (Tvärvetenskaplig och kreativ kompetens)

Studierna styr den studerande till ett utvecklande och förnyande arbetssätt i förhållande till den egna karriären och den personliga ekonomin och till en företagande attityd. Vi stöder den studerandes företagande och lär ut betydelsen av att slutföra ett arbete. Vi skapar en ”företagsvänlig” atmosfär som ger friheter men sporrar till ansvarstagande. (Samhällelig kompetens)

Genomgående i matematikundervisningen vill vi hjälpa den studerande till att förstå att hen med hjälp av matematiken kan specificera och lösa globala problem. (Etisk kompetens och miljökompetens, Global och kulturell kompetens)

MAG1

Tal och ekvationer (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- repetera principerna för procenträkning
- kunna använda proportionalitet i problemlösning
- fördjupa kunskaperna i bråkräkning
- repetera räkneregler för potenser
- stärka sin förståelse för funktionsbegreppet
- förstå principerna för hur man löser ekvationer och ekvationspar
- lära sig använda programvara för att rita grafer till funktioner, göra tolkningar och för att lösa ekvationer.

I modulen koncentrerar vi oss på att repetera och fördjupa innehållet i det man lärt sig inom grundundervisningen. Vi fäster speciell uppmärksamhet vid förflyttningen från användningen av tal till användningen av symboler. Under modulens gång kan vi koncentrera oss på att kunna och förstärka grunderna eller på att fördjupa och utvidga dessa. Vi skapar också de studievänor som kommande studier baserar sig på och tar i bruk sådana program vi kommer att utnyttja i fortsatta studier.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att smidigt använda räknaprogram i räkneuppgifter med grundläggande räknesätt (exakt värde och närmevärde)
- lära sig spara en funktion och beräkna dess värden
- lära sig rita grafen till en funktion och ändra inställningar i koordinatsystemet enligt det situationen kräver
- lära sig rita grafen till en funktion: åskådliggöra funktionsvärdet, tecknet hos funktionen, nollställen och övriga skärningspunkter
- lära sig lösa en ekvation symboliskt (Lös-funktionen)
- lära sig lösa ett ekvationspar grafiskt och symboliskt

- bekanta sig med det elektroniska svaret i matematiken (ex. användningen av formeleditorn).

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• talmängderna och de grundläggande räkneoperationerna • motsatt tal och inverterat tal samt absolutbelopp • procenträkning • räkneregler för potenser (exponenten heltal) • direkt och omvänt proportionalitet • funktion, ritning och tolkning av grafer • lösning av förstgradsekvationer • ekvationspar • kvadratrot och kubikrot • potensfunktioner och potensekvationer (gradtalen 2 och 3)	Grundläggande beräkningar och räkneordningen. Talmängderna från naturliga tal till reella tal, tallinjen och talens storleksordning. Framställning av rationella tal som bråk, avslutade decimaltal eller periodiska decimaltal. Grundläggande räkneregler med bråk inklusive inverterade tal och potenser (där n är ett heltal). Negativ exponent och exponenten noll samt tiopotensformen för ett tal. Irrationella tal. Exakt värde och närmevärde. Kvadraten och kuben på ett tal, kvadratroten och tredjoroten av ett tal: definitionerna. (Räkneregler för kvadratrötter studeras i modul MAA2. Allmänna rotbegreppet och potensekvationer studeras i modulerna MAA2 och MAB4). Procent. Procentenhet, procentfaktor. Beräkning av grundvärdet. Jämförelse- och förändringsprocent, successiva förändringar. Vi granskar mångsidigt fenomen som har att göra med procentuella förändringar. Proportionalitet. Direkt och omvänt proportionella storheter i praktiska situationer. Formulering av ett problem till en ekvation. Att lösa en proportionalitetskvation.

Funktion. Specificering av begreppet funktion. Variabel, funktionsvärde, funktionsuttryck och beräkning av funktionsvärdet. Beräkning av variabelvärdet. Grafen till en funktion och tolkandet av den: att bestämma nollställena algebraiskt och grafiskt samt att lägga märke till funktionens tecken. Att förena en graf med ett uttryck. (Vi studerar begreppen definitions- och värdemängd i modulerna MAA2 och MAA5.)

Ekvation och ekvationspar. Lösning av förstgradsekvationer och potensekvationerna ($n = 2, 3$). Att undersöka om ett givet tal utgör en lösning till en ekvation. Att avlägsna nämnare ur ekvationer. Lösning av ett linjärt ekvationspar både med substitutionsmetoden och additionsmetoden (elimineringsmetoden).

3,14159265358979323846264338327950
2884197169399375105820974944592307
8164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058
2231725359408128481117450284102701
93852105559646229489549303819644
2881097366593344612847564823378678
3165277201901145645669234603486104
5432664821339360726024914127372458
7006806815588174881520920962829254
0912153643678925963600113305305488
2046652138414695494151160943305727
03657595919530921861173819326117931

MAB2

Uttryck och ekvationer (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- få övning i att använda matematik i problemlösning och lära sig att lita på sin egen matematiska förmåga
- lära sig att bilda uttryck och ekvationer till givna problem samt att lösa ekvationer och tolka lösningarna
- kunna tillämpa talföljder och summor vid matematisk problemlösning
- kunna använda programvara när hen undersöker polynomfunktioner samt vid tillämpning av polynomekvationer och -funktioner.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- befästa färdigheter hen inhämtat i modul MAG1 vad gäller ekvationslösning och lösning av ett ekvationspar samt vad gäller granskning av funktioner
- lära sig förenkla polynomuttryck kunna lösa ekvationer som hör till modulen, både grafiskt och symboliskt; kunna bestämma exakt lösning och närmestvärdeslösning för ett svar
- lära sig att undersöka, exempelvis med en glidare, hur koefficienterna i en funktion av första och andra graden påverkar grafens utseende
- lära sig utnyttja tabellkalkyl i undersökning av talföljder och summor: aritmetisk och geometrisk talföljd med hjälp av utfyllningsverktyget i tabellprogrammet, beräkning av summa samt grafen av en talföljd i koordinatsystemet
- öva sig i att svara elektroniskt på uppgifter.

Centralt innehåll

- formulering av problem som ekvationer
- ekvationslösning

Specificering av innehållet

Uttryck och ekvationer. Lösning av ekvationer av första och andra graden. Lösning av ett ekvationspar (ex. linjens och parabelns skärningspunkter med substitutionsmetoden). Beroende på uppgiftens natur löser vi ekvationen med exakta värden eller närmestvärden. Val av storhet och beteckning i tilläggande uppgifter, bildan-

- tolkning och värdering av lösningar till en ekvation
- polynomfunktioner av andra graden och lösning av andragradsekvationer
- aritmetisk talföljd och summa
- geometrisk talföljd och summa

det av uttryck (bl.a. genom att göra tabell och en modellfigur), att bilda en ekvation och lösa den med en vettig noggrannhet, tolkning och bedömning. Att modellera fenomen i den verkliga världen med hjälp av polynomfunktioner av första och andra graden (ex. likformig rörelse, kaströrelsen, taxiavgift, dataavgift, broar, backar osv.). Att anpassa en kurva till en punktmängd tar vi upp i modul MAB4.

Talföljder. Beteckningar som används för att beteckna talföljder. Tyngdpunkten ligger på aritmetiska och geometriska talföljder: att identifiera typen av talföljd, att beräkna en differens eller kvot och bestämning av den allmänna termen. Att bestämma värdet av ett efterfrågat element med hjälp av den allmänna termen. Undersökning av huruvida ett givet tal är ett tal i talföljden eller vilket tal i ordningen det är (ex. via symboliska ekvationer eller tabellkalkyl). Beräkning av aritmetisk och geometrisk summa med summaformler. Granskning av olikheter kan exempelvis göras med hjälp av tabellkalkylprogram genom att exempelvis räkna upp tal i talföljden. Vi studerar ytterligare tillämpningar i modul MAB7.

MAB3

Geometri (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- bli van att göra iakttagelser och dra slutsatser om geometriska egenskaper hos figurer och kroppar
- stärka förmågan att rita plana figurer och tredimensionella kroppar
- kunna lösa praktiska problem med hjälp av geometri
- kunna använda programvara vid undersökning av figurer och kroppar och vid geometriska tillämpningar.

Under modulens gång är det naturligt att den studerande övar sig i att göra egna observationer och finna regelbundenheter samt i att ställa frågor, göra antaganden och dra slutsatser (samt motivera dessa) på basis av de egna undersökningarna.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- bekanta sig med att rita enkla modellfigurer med hjälp av ett geometriprogram och sådana program som finns i programvalen i A-delen i studentprovet i matematik
- lära sig att undersöka egenskaper och regelbundenheter hos figurer med hjälp av ett dynamiskt geometriprogram (ex. båginkelsatsen)
- kunna lösa potensekvationer av andra och tredje graden samt ange exakt värde och närmevärde för en lösning
- lära sig beräkna värden för sinus, cosinus och tangens samt bestämma en spetsig vinkel (närmevärden)
- öva sig i att utnyttja räknarprogram för att lösa geometriska problem: beräkningar, förenklingar och lösning av ekvationer
- bekanta sig med problemlösning genom att konstruera en figur eller kropp och mäta en vinkel, en längd, en area eller något annat mätvärde genom att utnyttja programmet.

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• likformighet hos figurer • trigonometri i en rätvinklig triangel • Pythagoras sats och den omvända satsen till Pythagoras sats • bestämning av area och volym för figurer och kroppar • användning av geometriska metoder i koordinatsystemet	Likformighet. Likformighet och skala. Förhållandet mellan areor hos likformiga figurer och volymer hos likformiga kroppar. Triangelsatsen om vv-likformighet. Tyngdpunkten ligger på problemlösning via praktiska problem. Plangeometri. Vinkelbenämningar. Egenskaper hos figurer: omkrets, höjd, diagonal, area. Rätvinklig triangel. Pythagoras sats och sinus, cosinus och tangens för en spetsig vinkel. Trianglar och övriga månghörningar. Likbent och liksidig triangel. Egenskaper hos en parallelogram. Cirkel. Längden av en cirkelbåge och en korda. Arean av en cirkel, en sektor och ett segment. Bågvinkelsatsen. Cirkelns tangent. Rymdgeometri. Egenskaper hos kroppar: arean för en bottenyta och en mantelyta, volym. Beräkningar som har att göra med ett rakt prisma, en rak cirkulär cylinder, en rak cirkulär kon, en rak pyramid och klotet. Undersökningar genom utveckling av en kropp i ett plan (exempelvis att mantelytan hos en cirkulär kon bildar en cirkelsektor). Koordinatsystemet för ett plan. Punkt, sträcka, sträckas mittpunkt och längd. Beräkning av omkrets och area för samt vinklar i månghörningar.

MAB4

Matematiska modeller (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- se regelbundenheter och samband hos fenomen i den verkliga världen och kunna beskriva dessa med matematiska modeller
- värdera linjära och exponentiella tillväxtmodeller bland annat med hjälp av kalkylprogram och göra prognoser med hjälp av modellerna
- vänja sig vid att värdera kvalitet och användbarhet hos en modell
- kunna använda programvara för att skapa modeller och vid undersökning av egenskaperna hos polynomfunktioner och exponentialfunktioner samt vid lösning av polynomekvationer och exponentialekvationer i samband med tillämpningar.

Det centrala målet för denna modul är att studera egenskaper hos linjära och exponentiella modeller och hur man kan använda dessa modeller för att göra en modell av ett fenomen. Den studerande handleds till att bedöma riktigheten i framlagd matematisk information och hur man kunde tillämpa informationen när man gör tolkningar och prognoser med hänvisning till fenomenet. Det kan vara naturligt att förena modulens innehåll med exempelvis geografin (bl.a. modeller för befolkningstillväxt) och biologin (populationsmodeller).

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- kunna undersöka hur parametrar (exempelvis med hjälp av glidare) i en funktion påverkar funktionens egenskaper
- lära sig lösa exponentialekvationer och allmänna potensekvationer (närmevärde)
- lära sig utnyttja ett tabellkalkylprogram för att undersöka modeller för linjär och exponentiell tillväxt
- lära sig anpassa en polynomfunktion och en exponentialfunktion till en given punktmängd (i tillämpningsuppgifter)
- lära sig tillämpa sin egen modell genom att beräkna värdet av en funktion när variabelvärdet är känt och genom att beräkna variabelvärdet när funktionsvärdet är känt.

Centralt innehåll

- tillämpning av linjära och exponentiella modeller
- lösning av exponentialekvationer
- prognoser och bedömning av kvaliteten i en modell

Specificering av innehållet

Principer för att göra en matematisk modell. Att förstå en problemställning som har att göra med en praktisk situation. Att åskådliggöra de variabler som förknippas med fenomenet och sambandet mellan dessa variabler. Att bilda en matematisk modell (uttryck, ekvation eller funktion) antingen genom att sätta in värden för parametrarna i en linjär/exponentiell modell eller genom att anpassa en modell till en given punktmängd. Bedömning av den erhållna modellen exempelvis visuellt och genom att undersöka vettigheten hos prognoser: beskriver modellen fenomenet i ett visst intervall eller utanför detta. Lösning av problemet med vettig noggrannhet, tolkning och bedömning av resultatet. I modulen undersöker vi mångsidigt olika praktiska situationer (bl.a. storheter som beror av tiden).

Linjär modell. Linjens riktningskoefficient och bildandet av linjens ekvation. Parallella linjer.

Exponentiell modell. Allmän exponentiell modell $y = a \cdot k^x$, graftyper. Åskådliggörandet av exponentiell ökning och minskning, halveringstid. Bestämning av parametrarna k och a , allmän potensekvation och allmän rot. Lösning av sådana exponentialekvationer vilka kan skrivas i en sådan form att det går att fortsätta med att lösa en ekvation av första eller andra graden. Övriga exponentialekvationer kan lösas med ett räknarprogram (närmevärde). Vi kan undersöka olikheter med hjälp av ett program exempelvis genom att undersöka motsvarande ekvation och monotiniteten hos modellen. Begreppet logaritm ingår inte i modulens innehåll men man kan behandla begreppet om tiden medger det. Jämförelse mellan en linjär och en exponentiell modell: i en linjär modell är förändringen jämn, i en exponentiell modell är förändringen relativ.

MAB5

Statistik och sannolikhet (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig att behandla, åskådliggöra och tolka statistiskt material
- göra sig förtrogen med sannolikhetskalkylens grunder och med konkretiiserande modeller
- kunna använda programvara för att hämta, behandla och undersöka data i digitalt format, samt för att bestämma nyckeltal i ett observationsmaterial och som hjälpmedel i sannolikhetslära.

Under modulens gång är det naturligt att bekanta sig med olika metoder att skaffa och framställa information digitalt samt med att befästa färdigheter i multilitteracitet. Modulen kan exempelvis utgöra en del av ett studieavsnitt under vilket man bekantar sig med högskolors och arbetslivets sätt att behandla och producera kunskap. Detta kan exempelvis göras under studiebesök vid högskolor eller arbetsplatser. Det kan vara naturligt att kombinera modulinnehållet med exempelvis naturvetenskaperna (bl.a. grafer i statistiken).

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- öva sig i att använda ett tabellkalkylprogram smidigt, bl.a. cellreferenser, klassificering/ordning och filtrering (dvs. att urskilja väsentligt information)
- öva sig i att behandla ett statistiskt material smidigt: lära sig att sammanfatta kunskap genom att göra tabeller och bestämma karaktäristikor samt genom lära sig åskådliggöra statistiken med hjälp av olika diagram
- lära sig rita ett spridningsdiagram, anpassa en regressionslinje samt att bestämma korrelationskoefficienten
- bekanta sig med hur man tar reda på och kan ladda ned aktuell statistik från olika nätkällor samt hur man kan behandla, åskådliggöra och analysera statistiken
- lära sig att beräkna kombinationer
- bekanta sig med begreppet sannolikhet exempelvis genom att kasta tärning.

Keskeiset sisällöt	Specificering av innehållet
• åskådliggörande av statistiskt material och bestämning av nyckeltal • regression och korrelation • observation och avvikande observation • prognostisering • sannolikhetsbegreppet • additions- och multiplikationsregler • kombinationer och multiplikationsprincipen • modeller i sannolikhetslära	Behandling av ett statistiskt material. Grundmängd och sampel. Vi bekantar oss med både diskreta och kontinuerliga statistiska variabler. Klassindelning: klassgränser, verkliga klassgränser, klassmitt (jämnbredda klasser). Frekvenstabeller och statistisk sannolikhet. Karaktäristikor i statistiken: variationsintervall, lägesmått (modus, median, medelvärde) och standardavvikelse (standardavvikelse för sampel/urval). Att förstå beräkningsprincipen för karaktäristikorna. Vi undersöker statistik från olika områden, ex. biologi, geografi, historia och hälsokunskap. Att åskådliggöra statistik. Att välja ett lämpligt diagram för att åskådliggöra statistiken: cirkeldiagram, stolp- eller stapeldiagram, histogram (jämnbredda klasser) samt linjediagram (tidsserier och grafen av kumulerad frekvens, spridningsdiagram. Att tolka ett diagram. Avvikande observation. En avvikande observation är ett variabelvärde som avviker mycket från majoriteten av observationsvärdena. Vi kan uppskatta avvikelser ur grafen. Förståelse för att avvikande observationer kan ha betydande och felaktig påverkan på de statistiska karaktäristikorna, såsom medelvärdet och spridningen samt på regressionslinjen osv. Statistiskt beroende. Oberoende och beroende variabel, spridningsdiagram, att åskådliggöra ett linjärt beroende ur ett spridningsdiagram. Regressionslinje och korrelationskoefficient. Att göra upp prognoser med hjälp av den bildade regressionsmodellen. Att uppskatta prognoser ex-

exempelvis visuellt och genom att granska vettigheten hos prognoser: beskriver modellen fenomenet i ett visst intervall eller utanför intervallet.

Sannolikhetskalkyl. Att bekanta sig med begreppet sannolikhet exempelvis genom att kasta tärning. Modeller i sannolikhetskalkylen: klassisk sannolikhet, geometrisk sannolikhet och statistisk sannolikhet. Beräkningsmetoder för att ta reda på antalet elementarhändelser (produktprincipen och kombinationer). Multiplikationsregeln för oberoende händelser och additionsregeln för disjunkta händelser samt komplementregeln. Att utnyttja Venn-diagram för att åskådliggöra räkneregler.

3,14159265358979323846264338327950
2884197169399375105820974944592307
8164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058
2237725259408128781117450284102701
9375211855596446229489549303819644
288109756659384612847564823378678
3165277261909145645669234603486104
5432664821339360726024914127372458
7006606315588114881520920962829254
0917153843678925902600113305305488
2046652138414695184151160943305727
03657595919530921861173819326117931

MAB6

Grunder i ekonomisk matematik (1 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- behärska grundbegrepp och få färdigheter i ekonomisk matematik
- fördjupa sina färdigheter i procenträkning
- lära sig att beskriva hur processer inom ekonomin utvecklas
- kunna använda informationskällor och programvara för att göra beräkningar i samband med tillämpningar.

Den ekonomiska matematiken har indelats i två olika moduler. Denna första modul innehåller beskattning, index, valutor, penningvärde och enkel ränteräkning. Den andra modulen (MAB7) är kongruent med modul MAA9, vilket möjliggör bildandet av en studiehelhet tillsammans med samhällsläramodulen SH2.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig att bilda en indexserie och beskriva denna med hjälp av ett tabellkalkylprogram (linjediagram)
- lära sig att lösa en potensekvation (ex. att bestämma en genomsnittlig prisförändring)
- bekanta sig med ta reda på ekonomisk information (ex. skattetabeller, valutakurser och index) via olika nätkällor.

Centralt innehåll

- relativ andel, jämförelse, beräkning av förändring

Specificering av innehållet

Procentkalkyl. Vi fördjupar färdigheterna i procenträkning från modul MAG1 bl.a. genom att undersöka procentuttryck och beräkna genomsnittlig årlig förändring.

Grundbegrepp i den ekonomiska matematiken. Dessa finns antecknade i det centrala innehållet.

- index
- ränta och enkel ränteräkning
- skatter
- valutor

Index. Att bilda en enkel indexserie. Att använda index (ex. storheter som är bundna till index). Vi bekantar oss exempelvis med användningen av konsumentprisindex som mått på prisnivå, inflation och pengars köpkraft; konsumentpriser och realinkomstnivå. Jämförelse av olika penningssummor.

Räntekalkyl. Begreppet ränta och enkel räntekalkyl. Räntetid och ränteperiod. Depositioner och källskatt.

Beskattning och valutor. Grundprinciperna med beskattning av förvärvsinkomster: statens inkomstskatt, skattetabeller och skatteprogressivitet, kommunalskatt. Brutto- och nettotinkomst. Mervärdesskatt (och acciser). Valutaförändringar. I den fördjupande delen av det centrala innehållet kan vi undersöka hur devalvering och revalvering påverkar konsumentpriserna.

3,14159265358979323846264338327950
2884197149399875105820971944592307
816563882889856200343251421170679
8224808651328230664709384460955058
2231725381408128781117450284102701
9385211058596446229489549303819644
2881097586593344112847564823378678
3165271201909145945669234603486104
5432665821339360726024914127372458
7006406315588174385520920962829254
0917153643678925903860173305305488
2044452138414695184151160943305727
03657595919530921861173819326117931

MAB7

Ekonomisk matematik (1 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig använda sina matematiska färdigheter för att beräkna tillräckligheten hos resurser, för ekonomisk planering, företagande och beräkning av lönsamhet
- tillämpa formler för talföljder i matematiska problem som anknyter till ekonomi
- lära sig att anpassa matematiska modeller i ekonomiska situationer och förstå deras begränsningar
- kunna använda programvara vid beräkningar och i samband med tillämpningar.

Den ekonomiska matematiken har indelats i två olika moduler. Denna andra modul innehåller räntekalkyl, depositioner, lån samt modeller som har att göra med ekonomiska situationer. Modulen är identisk med modulen MAA9, vilket möjliggör byggandet av studieavsnitt med den ekonomiska modulen SH2 i samhällslära. Man kan förena modulen SH2 med moduler i ekonomisk matematik både ur den långa och den korta matematikens pensum. Det är möjligt att bilda ett gemensamt studieavsnitt av alla dessa tre moduler eller alternativt två skilda studieavsnitt: SH2+MAB7 eller SH2+MAA9.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig att utnyttja symbolisk kalkyl i beräkningar inom ekonomisk matematik, ex. i samband med ett annuitetslån
- lära sig utföra beräkningar som har med talföljder att göra: ex. spara en talföljd som en funktion $f(n)$, beräkna element i talföljden och lösa ekvationer
- lära sig göra låneberäkningar (ex. med hjälp av ett tabellkalkylprogram)
- bekanta sig med olika räknare på nätet (ex. vad gäller koldioxidspår)

Centralt innehåll	Specificering av innehållet
• aritmetisk och geometrisk talföljd och deras summor • ränteräkning: ränta på ränta, nuvärde och diskontering • depositioner och lån • matematiska modeller anpassade för ekonomiska situationer där talföljder och summor används	Talföljder. Vi begränsar oss till aritmetiska och geometriska talföljder och summor. Som tillämpningar betraktar vi ex. successiva depositioner (såsom kontoinsättningar) samt helhetsvärdet av depositioner. Vid sidan av ekonomiska tillämpningar kan vi exempelvis studera kalkyler som hänför sig till ekologiska resurser (såsom tillgången till fossila bränslet olja, mat och rent vatten). Räntekalkyl. När vi beräkna ränta på ränta studerar vi olika allmänna sätt att beräkna räntetid, avrunda resultat osv. Ränta på ränta och diskontering som metoder: ökat kapital, nuvärdet av betalningar gjorda vid olika tidpunkter. Lån. Grundbegrepp (lånekapital, amortering, återbetalningsrat osv.). Olika lånetyper (bostadslån, studielån, konsumtionslån, snabblån) och principer för återbetalning av dessa (lån med fast amortering, annuitetslån, fast annuitetslån) samt låneskötsel (beräkning av amorteringens, räntans och det kvarvarande lånets storlekar i de olika lånetyperna, och jämförelse av olika lånetyper).

MAB8

Matematisk analys (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- undersöka förändringshastigheten för en funktion med grafiska och numeriska metoder
- förstå tolkningen av derivatan som förändringshastigheten för en funktion
- kunna undersöka förloppet hos en polynomfunktion med hjälp av derivatan
- kunna bestämma största och minsta värde för en funktion i samband med tillämpningar
- kunna använda programvara för att undersöka förloppet hos en funktion, derivatan av en funktion samt för att bestämma extremvärden till en funktion i ett slutet intervall i samband med tillämpningar.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- lära sig rita en sekant till grafen för en funktion och lära sig bestämma den genomsnittliga förändringshastigheten
- lära sig rita en tangent till grafen för en funktion och lära sig bestämma funktionens förändringshastighet (grafisk derivering) samt åskådliggöra funktionens tillväxt grafiskt (med hjälp av att rita tangenten till funktionen)
- öva sig i att hantera uttryck smidigt (förenkling och beräkning av värdet av ett uttryck)
- kunna derivera en funktion och beräkna derivatans värde samt bestämma derivatans nollställen symboliskt
- kunna ta reda på derivatafunktionens tecken på basis av grafen (en polynomfunktion kan endast byta tecken vid ett nollställe)

Centralt innehåll

- grafiska och numeriska metoder
- polynomfunktionens derivata

Specificering av innehållet

Förändringshastighet hos en funktion.

Genomsnittlig och momentan förändringshastighet: att med hjälp av två punkter ur grafen beräkna närmevärden för tangentens och sekantens riktningskoeffi-

- undersökning av tecken och förlopp hos en polynomfunktion
- bestämning av största och minsta värde för en polynomfunktion i ett slutet intervall
- bestämning av förändringshastigheten för en funktion med hjälp av programvara

cienter för en polynomfunktion. Att beräkna genomsnittlig förändringshastigheten med hjälp av ett uttryck. Ingen tillväxt, konstant tillväxt, accelererande eller retarderande tillväxt. Att åskådliggöra funktionens monotonitet i en graf.

Derivata. Med åskådlig framställning utan exakt definition; sambandet mellan derivata, förändringshastighet och tangent. Derivering av en polynomfunktion och beräkning av värdet av derivatan. Praktiska maximerings- och minimeringsproblem bl.a. inom geometrin och den ekonomiska matematiken.

3,14159265358979323846264338327950
 2884197169399375105820974944592307
 8164062862089986280348253421170679
 8214808651328230664709384460955058
 2234725359408128481117450284102701
 9348211055596446229489549303819644
 2881097366593344612847564823378678
 3165277201909145645669234603486104
 5432664821335360726024914127372458
 7006806315588174881520920962829254
 0917153843676925903600113305305488
 2046652138414695184151160943305727
 03657595919530921861173819326117931

MAB9

Statistik och sannolikhetsfördelningar (2 sp)

Mål

Målen för modulen är att den studerande ska

- göra sig förtrogen med normalfördelningen som en matematisk modell
- sätta sig in i binomialfördelningen som en matematisk modell
- utveckla djupare och mångsidiga färdigheter i att undersöka och behandla statistisk information med hjälp av programvara
- veta hur man beräknar nyckeltal och sannolikheter i anknytning till statistiska fördelningar och kunna bestämma dessa med hjälp av programvara
- förstå begreppen konfidensintervall och felmarginal och kunna bestämma dessa med hjälp av programvara.

I modulen förstärker vi behärskningsen av stoffet i modul MAB5: principer för sannolikhetskalkyl (specifikt räkneregler i samband med binomialsannolikhet) färdigheter i att behandla statistik. Vi kan betona befastandet och kompletterandet av innehållet i modul MAB5 eller centrala nya modeller. Det kan vara naturligt att kombinera modulinnehållet exempelvis med psykologin (principer för statistisk forskning). Modulen kan exempelvis utföras i form av ett forsknings- eller projektarbete.

Programfärdigheter

Målen för modulen är att den studerande ska

- befästa sådana färdigheter ur modul MAB5 som gäller behandling och åskådliggörande av statistisk information: beräkning av karaktäristikor och bestämning av
- kunna beräkna kombinationer (binomialsannolikhet)
- lära sig framställa binomialfördelning grafiskt samt bestämma fördelningens karaktäristikor (väntevärde och standardavvikelse)
- lära sig rita figurer med normalfördelning
- lära sig bestämma sannolikheter som anknyter till binomialfördelning och normalfördelning samt lösa den omvända situationen
- lära sig att symboliskt bestämma en obekant (väntevärdet eller standardavvikelsen) i normalfördelning i situationer vilka inte förutsätter normering

- känna till de storheter som behövs när man bildar ett konfidensintervall och kunna bestämma storheterna och ett konfidensintervall.

Centralt innehåll

- normalfördelning och begrepp för normering av fördelningen (väntevärde och standardavvikelse)
- upprepat försök
- binomialfördelning
- konfidensintervall och felmarginal

Specificering av innehållet

Binomialfördelning. Att känna till räkenformeln för upprepade försök och binomial sannolikhet. Väntevärde och standardavvikelse i binomialfördelningen. Kumulerad sannolikhet..

Normalfördelning. Att känna till grundegenskaper hos fördelningen (bl.a. symmetri) och använda normalfördelningsmodellen i tillämpningar. Kumulerad sannolikhet och fördelningsfunktion. Normering och jämförelse mellan två normalfördelningar. Normerad normalfördelning och begreppet konfidensintervall, kritiska värden. Sambandet mellan binomialfördelning och normalfördelning via exempel.

Statistisk slutledning. Vi behandlar aktuell statistisk information som syns i media. Grundmängd, inklusive karaktäristikor (medelvärde och relativ andel) för grundmängden, där karaktäristikorna uppskattas med hjälp av beräknade karaktäristikor ur ett sampel och genom att bilda ett konfidensintervall. Beräkning av medelvärkets medelfel. Konfidensgrad och hur denna påverkar konfidensintervallet. Felmarginal. Grundprincipen för att bilda ett konfidensintervall: vi måste känna till sampelstorleken, sampelmedelvärdet och sampelstandardavvikelsen eller den relativa andelen i samplet, konfidensgraden och det kritiska värde som har att göra med konfidensgraden. Teoretiska motiveringar till att bilda ett konfidensintervall (samplets medelvärde och procentandel är i det närmaste normalfördelade) kan förbises. Statistiska test hör inte till modulinnehållet.