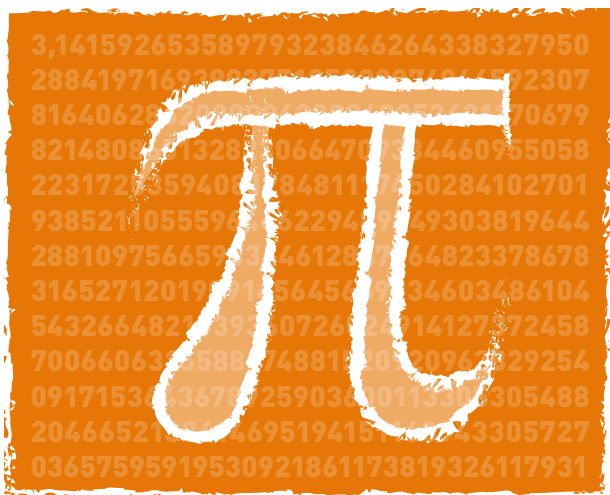


Lyhyen matematiikan tukimateriaalia

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019
lyhyen matematiikan moduulien sisältöjen tarkastelua



Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry:n edustajat ja
Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 laadinnassa
mukana olleen aineryhmän jäsenet ovat yhteistyössä tuottaneet
tukimateriaalia perusteissa annettujen ainekohtaisten
keskeisten sisältöjen avaamiseksi lyhyessä matematiikassa.

SISÄLLYS

Pakolliset opinnot

MAY1 Luvut ja yhtälöt	9
MAB2 Lausekkeet ja yhtälöt.....	12
MAB3 Geometria.....	14
MAB4 Matemaattisia malleja.....	16
MAB5 Tilastot ja todennäköisyys	18
MAB6 Talousmatematiikan alkeet	21
MAB7 Talousmatematiikka	23
Valtakunnalliset valinnaiset opinnot	
MAB8 Matemaattinen analyysi	25
MAB9 Tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat	27

Kiitämme tuesta:



Teknologiateollisuuden
100-vuotissäätiö



This event is supported by the European Commission's H2020 programme – project Scientix 3 (Grant agreement N. 730009), coordinated by European Schoolnet (EUN). The event is the sole responsibility of the organizer and it does not represent the opinion of the European Commission (EC) or EUN, and neither the EC or EUN are responsible for any use that might be made of information contained.

JOHDANTO

Tämä matematiikan paikallisen opetussuunnitelmatyön laadintaa tukemaan tarkoitettu materiaali on tehty yhteistyössä Opetushallituksen lukion matematiikan opetussuunnitelman perusteiden työryhmän ja Matemaattisten aineiden opettajien ai-nejärjestö MAOL:n kanssa. Materiaalin tarkoitus on täsmentää ja avata opetussuunnitelman perusteiden normiluonteesta johtuvaa varsin tiivistä esitystä. Sen toivotaan selventävän perustetyöryhmän ajatuksia sisältöjen karsimisesta ja rajaamisesta sekä tuovan uusia näkökulmia opetuksen suunnitteluun. Tukimateriaali ei ole velvoittava, vaan ehdotetut toteuttamistavat ja esimerkit ovat suuntaa antavia.

Uudessa lukion opetussuunnitelman perusteissa on kuvattu laaja-alainen osaaminen yleisesti ja oppiaine-kohtaisesti. Paikalliseen opetussuunnitelmaan on määrätty kirjattavaksi, kuinka laaja-alaisen osaamisen tavoitteet aiotaan toteuttaa eri opintojaksoissa. Tukimateriaali avaa sitä, kuinka laaja-alainen osaaminen voisi näkyä matematiikan opetuksessa. Matematiikan luonteesta johtuen, näyttää siltä, että parhaiten laaja-alaisen osaamisen osa-alueet ovat toteutettavissa kaikissa opintojaksoissa painottaen kulloinkin tilanteeseen sopivaa laaja-alaista osaamista.

Uudet lukion opetussuunnitelman perusteet edellyttävät, että matematiikan opiskelussa opiskelija kehittyy hyödyntämään tietokoneohjelmistoja ja digitaalisia tiedonlähteitä oppimisessa, tutkimisessa ja ongelmanratkaisussa sekä arvioimaan tietoteknisten välineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta. Tässä tukimateriaalissa esitetään, kuinka opiskelijan ohjelmistotaitoja voitaisiin kehittää opintojen edetessä, ja mitä taitoja tavoitellaan. Ohjelmistotaitojen parantaminen tehdään vaiheittain liittämällä ne kulloinkin opintojaksossa käsiteltyihin sisältöihin. Keskeisenä tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu käyttämään ohjelmistoja järkevästi ja valitsemaan tilanteeseen parhaiten sopivan välineen (mm. taulukkolaskenta, symbolinen laskenta, geometrian ohjelmat).

Tukimateriaalissa ohjelmistotaitojen kuvausten yhteydessä käytetään sanoja *tutustuu*, *oppii*, *osaa* ja *harjaantuu* seuraavissa merkityksissä:

Tutustuu. Opiskelija kohtaa taidon ehkä ensimmäistä kertaa ja oppii sen mahdollisesti myöhemmissä opinnoissaan. Tässä kohtaa opintoja tavoitteena voi olla esimerkiksi mielenkiinnon herättäminen.

Oppii. Opiskelija harjoittelee taitoa (mahdollisesti) ensimmäistä kertaa.

Osaa. Aiemmissa opinnoissa opittua taitoa kehitetään mahdollisesti uudessa tilanteessa.

Harjaantuu. Taitoa on harjoiteltu tai harjoitellaan paljon, jolloin osaaminen rutinoituu.

LAAJA-ALAINEN OSAAMINEN MATEMATIIKASSA

Opetuksessa tutkitaan arkielämän ja matematiikan välisiä yhteyksiä, hyödynnetään mahdollisuuksia vahvistaa opiskelijan kiinnostusta, itsetuntoa ja tiedonhankintaprosesseja sekä kannustetaan opiskelijaa kokeiluihin ja sinnikkääseen työskentelyyn. Matematiikassa opittavia taitoja sovelletaan omien tavoitteiden asettamisessa ja päätöksenteossa sekä pohditaan, kuinka matematiikan taitoja voidaan hyödyntää kestävässä kehityksessä ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa. Näin vahvistetaan opiskelijan yhteiskunnallista osaamista, eettisyyttä ja ympäristöosaamista sekä hyvinvointiosaamista.

Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla. Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Tällä vahvistetaan muun muassa vuorovaikutusosaamista. Opetustavat valitaan yhdessä opiskelijoiden kanssa. Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä.

Matematiikan opiskelu tukee globaali- ja kulttuuri-osaamisen sekä monitieteisen ja luovan osaamisen laaja-alaisia tavoitteita. Opiskelijaa ohjataan ymmärtämään matematiikan merkitys erilaisissa kulttuureissa ja historian kehityksessä sekä sen luonne universaalina kielenä. Opiskelija oppii hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin sekä matematiikassa että muissa oppiaineissa. Opiskelijaa rohkaistaan käyttämään matematiikan kieltä ja merkintöjä sekä ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä. Opiskelijaa tuetaan taidossa siirtyä eri matemaattisen tiedon esitysmuodoista toiseen ilmiöiden mallintamisessa, ongelman ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa sekä tuloksesta keskustelemisessä.

LAAJA-ALAISEN OSAAMISEN TAITOJEN KEHITTYMINEN MATEMATIIKASSA

Lukion opetussuunnitelman perusteissa on kuvattu, miten laaja-alaisen osaamisen osa-alueet sisältyvät matematiikan opintoihin, ja ne on huomioitu myös matematiikan opintojen tavoitteissa. Paikallisessa opetussuunnitelmassa laaja-alaisen osaamisen tavoitteita täydennetään ja konkretisoidaan matematiikan kohdalla sekä määritellään, miten eri osa-alueiden tavoitteita toteutetaan kussakin opintojaksossa.

Matematiikan opinnoissa laaja-alaista osaamista lähestytään tieteenalan lähtökohdista. Laaja-alaisuus voisi näkyä matematiikan opetuksessa mm. seuraavilla tavoilla:

Opiskelijaa ohjataan tavoitteellisesti tunnistamaan ja hyödyntämään omia vahvuuksiaan ja toisaalta kehittämiskohteitaan sekä huomaamaan, että menestyksellinen matematiikan opiskelu vaatii pitkäjänteistä työntekoa ja sinnikkyyttä. Opetuksessa tuetaan epävarmuuden sietokykyä ja vahvistetaan luottamusta, jolloin opiskelija oppii arvioimaan myös omia voimavarojaan ja suunnittelemaan ajankäyttöä. Opetuksessa kannustetaan vastuunottoon omasta oppimisesta luomalla työn tekemisen kulttuuri, joka arvostaa omaa ja muiden osaamista ja sallii erityisosaamista mutta myös epäonnistumisia. Opiskelutaitojen kehittymistä ohjataan tavoitteellisesti, jolloin opiskelija omaksuu matematiikan oppimista tukevia käytänteitä. (Hyvinvointiosaaminen)

Opetustilanteissa rakennetaan positiivinen, avoin ja kannustava ilmapiiri tukemaan jokaista opiskelijaa ja auttamaan heitä saavuttamaan omia tavoitteita, sillä ns. positiivinen kierre imee heikommatkin opiskelijat mukaan. Turvallinen opiskeluympäristö kannustaa opiskelijoita keskusteluun, omien ratkaisumenetelmien esittämiseen ja oman ajattelun sanoittamiseen sekä yhteistyöhön, yhdessä tutkimiseen ja oppimiseen. (Vuorovaikutusosaaminen)

Opetuksessa rohkaistaan opiskelijaa tarkastelemaan ongelmia uudella tavalla, yhdistelemään asioita sekä soveltamaan matematiikan menetelmiä eri oppiaineissa. Monitieteellinen lähestymistapa voi motivoida oppimaan uutta ja innostaa uteliaisuuteen sekä merkityksien etsimiseen. Opintojen aikana tutustutaan erilaisiin tiedonhankinnan ja -esittämisen tapoihin digiajassa, ja matematiikan kannalta olennaisten monilukutaidon osa-alueiden (sanallinen, numeerinen, symbolinen, kuvallinen) hallintaa syvennetään tavoitteellisesti. Samalla opiskelija oppii arvioimaan matemaattisesti esitetyn tiedon luotettavuutta ja sovellusaloja. (Monitieteinen ja luova osaaminen)

Opinnot ohjaavat opiskelijaa kehittävään ja uudistuvaan otteeseen suhteessa omaan uraan ja taloudenhoitoon sekä yrittäjämäiseen asenteeseen. Opetus tukee opiskelijan yritteliäisyyttä ja yrittäjämäistä toimintaa sekä opettaa työn loppuunsaattamisen merkityksen. Opiskeluun luodaan ”yrittäjämäinen” ilmapiiri, joka antaa vapauksia mutta kannustaa vastuunottoon. (Yhteiskunnallinen osaaminen)

Läpi matematiikan opintojen opiskelijaa autetaan hahmottamaan, että matematiikan avulla voidaan jäsentää ja ratkaista globaaleja ongelmia. (Eettisyys ja ympäristöosaaminen, Globaali- ja kulttuuriosaaminen)

MAY1

Luvut ja yhtälöt (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- kertaa prosenttilaskennan periaatteet
- osaa käyttää verrannollisuutta ongelmanratkaisussa
- syventää murtolukujen laskutoimitusten osaamistaan
- kertaa potenssin laskusäännöt
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää yhtälön ja yhtälöparin ratkaisemisen periaatteet
- oppii käyttämään ohjelmistoja funktion kuvaajan piirtämisessä, havainnoinnissa ja yhtälöiden ratkaisemisessa.

Moduulissa keskitytään perusopetuksessa opiskeltujen sisältöjen kertaamiseen ja syventämiseen. Moduulin aikana kiinnitetään erityistä huomiota siirtymiseen luvuista symbolien käyttöön. Moduulin aikana voidaan keskittyä perusasioiden osaamisen vahvistamiseen tai osaamisen syventämiseen ja laajentamiseen. Moduulin aikana myös luodaan ne opiskelutottumukset, joihin myöhempien moduulien opiskelu perustuu sekä otetaan käyttöön niitä ohjelmistoja, joita tullaan hyödyntämään myöhemmissä opinnoissa.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu sujuvaan laskinohjelmien käyttöön peruslaskutoimitusten yhteydessä (tarkka arvo ja likiarvo)
- oppii tallentamaan funktion ja laskemaan funktion arvoja
- oppii piirtämään funktion kuvaajan sekä muuttamaan koordinaatiston asetuksia tilanteeseen sopivaksi
- oppii tutkimaan funktion kuvaajaa: havainnoimaan funktion arvoa, merkkiä, nollakohtia sekä muita leikkauspisteitä
- oppii ratkaisemaan yhtälön symbolisesti (ratkaise-toiminto)
- oppii ratkaisemaan yhtälöparin graafisesti ja symbolisesti
- tutustuu sähköiseen vastaamiseen matematiikassa (esim. kaavaeditorin käyttö).

Keskeiset sisällöt

- lukujoukot ja peruslaskutoimitukset
- luvun vastaluku, käänteisluku ja itseisarvo
- prosenttilaskenta
- potenssin laskusäännöt (eksponenttina kokonaisluku)
- suoraan ja kääntäen verrannollisuus
- funktio, kuvaajan piirto ja kuvaajan tulkinta
- ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen
- yhtälöpari
- neliö- ja kuutiojuuri
- potenssifunktio ja potenssiyhtälö (asteluvut 2 ja 3)

Tarkennuksia sisältöihin

Peruslaskutoimitukset ja laskujärjestys.

Lukujoukot luonnollisista luvuista reaali-lukuihin, lukusuora ja lukujen suuruusjärjestys. Rationaaliluvun esitys murtolukuna, päättyvänä desimaalilukuna tai jaksollisena desimaalilukuna. Murtolukujen peruslaskutoimitukset mukaan lukien käänteisluku ja potenssiin korotukset (n kokonaisluku). Negatiivinen ja nollas potenssi sekä luvun kymmenpotenssiesitys. Irrationaaliluku. Tarkka arvo ja likiarvo. Luvun neliö ja kuutio, neliö- ja kuutiojuuri: määritelmät. (Neliöjuuren laskusäännöt opiskellaan moduulissa MAA2. Yleinen juuri ja potenssiyhtälö opiskellaan moduuleissa MAA2 ja MAB4).

Prosentti. Prosenttiyksikkö, prosenttikerroin. Perusarvon ratkaiseminen. Vertailu- ja muutosprosentti, peräkkäiset muutokset. Tarkastellaan monipuolisesti ilmiöitä, joihin liittyy prosentuaalisia muutoksia.

Verrannollisuus. Suoraan ja kääntäen verrannollisia suureita käytännön tilanteissa. Ongelman muotoileminen yhtälöksi. Verrantomuotoisen yhtälön ratkaiseminen.

Funktio. Funktiokäsitteen täsmennys. Muuttuja, funktion arvo, funktion lauseke ja funktion arvon laskeminen. Muuttujan arvon ratkaiseminen. Funktion kuvaaja ja sen tulkitseminen: nollakohdan ratkaiseminen algebrallisesti ja graafisesti sekä funktion merkin havainnointi. Kuvaajan ja lausekkeen yhdistäminen. (Määrittely- ja arvojoukko opiskellaan moduuleissa MAA2 ja MAA5.)

Yhtälö ja yhtälöpari. Ensimmäisen asteen yhtälön ja potenssiyhtälön ($n = 2,3$) ratkaiseminen. Sen tutkiminen, onko annettu luku yhtälön ratkaisu. Nimittäjien poistaminen yhtälöstä. Lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen sekä sijoitus- että eliminointimenetelmällä.

3,14159265358979323846264338327950
2884197169399375105820974944592307
8164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058
2231725359408128481117450284102701
93852105559646229489549303819644
2881097366593344612847564823378678
3165277201909145645669234603486104
5432664821339360726024914127372458
7006806815588174881520920962829254
0917153643678925963600113305305488
2046652138414695494151160943305727
03657595919530921861173819326117931

MAB2

Lausekkeet ja yhtälöt (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu käyttämään matematiikkaa ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä
- oppii muodostamaan lausekkeita ja yhtälöitä annettuihin ongelmiin sekä ratkaisemaan yhtälöitä ja tulkitsemaan saatua ratkaisua
- osaa soveltaa lukujonoja ja niistä muodostettuja summia matemaattisten ongelmien ratkaisussa
- osaa käyttää ohjelmistoja polynomin funktion tutkimisessa sekä polynomiyhtälöihin ja polynomifunktioihin liittyvien sovellusten yhteydessä.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa moduulissa MAY1 hankkimiaan yhtälön ja yhtälöparin ratkaisemiseen sekä funktion tarkasteluun liittyviä taitojaan
- oppii sieventämään polynomilausekkeita
- osaa ratkaista moduuliin kuuluvia yhtälöitä graafisesti ja symbolisesti; osaa määrittää ratkaisulle tarkan arvon ja likiarvon
- oppii tutkimaan, esim. liukusäätimen avulla, miten ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktion kertoimet vaikuttavat funktion kuvaajaan
- oppii hyödyntämään taulukkolaskentaohjelmaa lukujonon ja summien tarkastelussa: aritmeettisen ja geometrisen lukujonon tuottaminen täyttökahvan avulla, summan laskeminen sekä lukujonon kuvaaminen koordinaatistossa
- harjoittelee sähköistä vastaamista.

Keskeiset sisällöt

- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- yhtälöiden ratkaiseminen
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen

Tarkennuksia sisältöihin

Lausekkeet ja yhtälöt. Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen. Yhtälöparin ratkaiseminen (esim. suoran ja paraabelin leikkauspisteet sijoitusmenetelmällä). Tehtävän luonteesta riippuen yhtälö ratkaistaan tarkkoilla arvoilla tai likiarvoilla. Soveltavassa tehtävässä muuttujasuureen valitseminen ja nimeäminen, tilannetta kuvaavan lausekkeen muodosta-

- toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen
- aritmeettinen lukujono ja summa
- geometrinen lukujono ja summa

minen (mm. taulukointia tai mallikuvaa hyödyntämällä), yhtälön muodostaminen ja ratkaiseminen sekä vastauksen mielekäs tarkkuus, tulkinta ja arviointi. Reaalimaailman ilmiöiden ja muotojen kuvaaminen ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktiolla (esim. tasainen liike, heittoliike, taksimaksu, datamaksu, sillat, mäet jne). Käyrän sovittaminen pistejoukkoon opiskellaan moduulissa MAB4.

Lukujonot. Lukujonon merkitsemisessä käytetyt merkinnät. Tarkastelun painopiste on aritmeettisissa ja geometrisissa lukujonossa: jonotyyppin tunnistaminen, differenssin tai suhdeluvun laskeminen ja yleisen jäsenen muodostaminen. Pyydetyn jäsenen laskeminen yleisen jäsenen avulla. Sen tutkiminen, onko annettu luku jonon jäsen tai kuinka mones jäsen (yhtälön avulla esim. ohjelman ratkaisu-toiminnolla tai taulukkolaskentaohjelmassa). Aritmeettisen ja geometrisen summan laskeminen summakaavalla. Epäyhtälötarkastelut voidaan tehdä esim. taulukkolaskentaohjelmassa lukujonon jäseniä luettelemalla. Lukujonojen sovelluksia käsitellään lisää moduulissa MAB7.

3,14159265358979323846264338327950
 2884197169399875105820974944592307
 8160662842880881200368254421170679
 8214808651328230664709384460955058
 2231725386708128781117450284102701
 9385211055596446222489549303819644
 2881097566593344112847564823378678
 3165271201909145645669234603486104
 5432664821339360726024914127372458
 700606315588174385520925962829254
 0911153643678925903869173305305488
 2041452138414695124151160943305727
 03657595919530921861173819326117931

MAB3

Geometria (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista
- vahvistaa tasokuvioden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan
- osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen
- osaa käyttää ohjelmistoja kuvioden ja kappaleiden tutkimisessa sekä geometriaan liittyvien sovellusten yhteydessä.

Moduulin aikana on luontevaa harjaantua opiskelijaa tekemään havaintoja ja etsimään säännönmukaisuuksia sekä omien tutkimusten pohjalta esittämään kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu yksinkertaisten mallikuvien piirtämiseen geometriaohjelmalla ja yo-kokeen A-osan ohjelmistoilla
- oppii tutkimaan kuvioden ominaisuuksia ja säännönmukaisuuksia dynaamisen geometrian ohjelmalla (esim. kehäkulmalause)
- osaa ratkaista toisen ja kolmannen asteen potenssiyhtälön ja ilmoittaa ratkaisulle tarkan arvon ja likiarvon
- oppii laskemaan sinin, kosinin ja tangentin arvoja sekä ratkaista terävän kulman (likiarvot)
- harjaantuu laskinohjelmiston hyödyntämiseen geometrian ongelmien ratkaisemisessa: laskemisessa, sieventämisessä ja yhtälönratkaisussa
- tutustuu ongelman ratkaisemiseen konstruomalla kuvion tai kappaleen ja määrittämällä kulman, pituuden, pinta-alan tai muun mitan hyödyntämällä ohjelmistoa.

Keskeiset sisällöt

- kuvioiden yhdenmuotoisuus
- suorakulmaisen kolmion trigonometria
- Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause
- kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen
- geometrian menetelmien käyttö tasokoordinaatistossa

Tarkennuksia sisältöihin

Yhdenmuotoisuus. Yhdenmuotoisuus ja mittakaava. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen ja yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde. Kolmioiden kk-yhdenmuotoisuuslause. Käsittelyn painopiste on käytännön ongelmien ratkaisemisessa.

Tasogeometria. Kulmiin liittyviä nimityksiä. Kuvioiden ominaisuuksia: piiri, korkeusjana, lävistäjä, pinta-ala.

Suorakulmainen kolmio. Pythagoraan lause ja terävän kulman sini, kosini ja tangentti.

Kolmiot ja muut monikulmiot. Tasakylkinen ja -sivuinen kolmio. Suunnikkaan ominaisuudet.

Ympyrä. Kehän, kaaren ja janteen pituus. Ympyrän, sektorin ja segmentin pinta-ala. Kehäkulmalause. Ympyrän tangentti.

Avaruusgeometria. Kappaleiden ominaisuuksia: pohjan ja vaipan pinta-ala, tilavuus. Suoraan särmiöön, ympyrälieriöön, ympyräkartioon, pyramidiin ja palloon liittyviä laskuja. Kappaleen tasolevitykset (esim. ympyräkartion vaippa muodostaa ympyräsektorin).

Tason koordinaatisto. Piste, jana, janan keskipiste ja pituus. Monikulmioiden piirin, pinta-alan ja kulmien laskeminen.

MAB4

Matemaattisia malleja (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- näkee reaali maailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla
- arvioi lineaarisen ja eksponentiaalisen kasvun malleja muun muassa taulukkolaskentaohjelman avulla ja tekee ennusteita mallien avulla
- tottuu arvioimaan mallien hyvyttä ja käyttökelpoisuutta
- osaa käyttää ohjelmistoja mallintamisessa, polynomi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä polynomi- ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusten yhteydessä.

Moduulin keskeinen päämäärä on perehtyä lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin ominaisuuksiin ja käyttöön ilmiötä mallinnettaessa. Moduulin aikana opiskelijaa ohjataan myös arvioimaan matemaattisesti esitetyn tiedon luotettavuutta ja sovel-lusala, kun tehdään ilmiötä koskevia tul-kintoja ja ennusteita. Moduulin sisältöjä voi olla luontevaa yhdistää esimerkiksi maantieteeseen (mm. väestönkasvun mal-lit) sekä biologiaan (populaatiomallit).

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa tutkia funktion parametrien vaikutuksia funktion ominaisuuksiin esim. liukusäätimen avulla
- oppii ratkaisemaan eksponenttiyhtälön ja yleisen potenssiyhtälön (likiarvo)
- oppii hyödyntämään taulukkolaskentaohjelmaa lineaarisen ja eksponentiaalisen kasvun mallien tarkasteluun
- oppii sovittamaan polynomifunktion ja eksponenttifunktion annettuun pistejoukkoon (sovellustehtävissä)
- oppii soveltamaan saamaansa mallia laskemalla funktion arvon, kun muuttujan arvo tunnetaan ja muuttujan arvon, kun funktion arvo tunnetaan.

Keskeiset sisällöt

- lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen
- eksponenttiyhtälön ratkaiseminen
- ennusteet ja mallin hyvyys

Tarkennuksia sisältöihin

Matemaattisen mallintamisen periaate.

Käytännön tilanteeseen liittyvän ongelman jäsentäminen ja ilmiöön liittyvien muuttujien ja niiden välisten yhteyksien hahmottaminen. Matemaattisen mallin (lauseke, yhtälö tai funktio) muodostaminen joko sijoittamalla parametrien arvot lineaariseen/eksponentiaaliseen malliin tai sovittamalla malli annettuun pistejoukkoon. Saadun mallin arvioiminen esim. visuaalisesti ja tarkastelemalla ennusteiden mielekkyyttä: kuvaako malli ilmiötä tietyllä välillä tai välin ulkopuolella. Ongelman ratkaisu ja mielekäs tarkkuus, tulosten tulkinta ja arviointi. Moduulissa käsitellään monipuolisesti käytännön tilanteita (mm. ajasta riippuvat suureet).

Lineaarinen malli. Suoran kulmakerroin ja suoran yhtälön muodostaminen, suorien yhdensuuntaisuus.

Eksponentiaalinen malli. Yleinen eksponentiaalinen malli $y = k \cdot a^x$, kuvaajatyypit. Eksponentiaalisen kasvamisen ja vähenevän kuvaaminen, puoliintumisaika. Parametrien k ja a ratkaiseminen, yleinen potenssiyhtälö ja yleinen juuri. Sellaisten eksponenttiyhtälöiden ratkaiseminen, jotka saadaan muokatuksi muotoon ja joiden ratkaiseminen palautuu 1. tai 2. asteen yhtälön ratkaisemiseen. Muut eksponenttiyhtälöt ratkaistaan ohjelmistolla (liikarvoina). Epäyhtälötarkastelut voidaan tehdä ohjelmistolla esimerkiksi ratkaisemalla vastaava yhtälö ja tarkastelemalla mallin kasvavuutta/vähenevyyttä. Logaritmi ei kuulu moduulin sisältöihin, mutta se voidaan käsitellä ajan salliessa. Lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin vertailu: lineaarisessa mallissa muutos on tasaista, eksponentiaalisessa mallissa suhteellista.

MAB5

Tilastot ja todennäköisyys (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu käsittelemään, havainnollistamaan ja tulkitsemaan tilastollisia aineistoja
- perehtyy todennäköisyyslaskennan perusteisiin ja sitä havainnollistaviin malleihin
- osaa käyttää ohjelmistoja digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä havaintoaineiston tunnuslukujen määrittämisessä ja todennäköisyyslaskennassa.

Moduulin aikana on luontevaa tutustua erilaisiin tiedonhankinnan ja -esittämisen tapoihin digiajassa sekä vahvistaa monilukutaitoa. Moduuli voi olla esimerkiksi osa opintojaksoa, jonka aikana tutustutaan korkeakoulujen ja työelämän tapoihin käsitellä ja tuottaa tietoa mm. opintojaksoon yhdistetyn korkeakoulu- tai työelämävierailun yhteydessä. Moduulin sisältöjä voi olla luontevaa yhdistää esimerkiksi luonnontieteisiin (mm. tilastolliset kuvaajat).

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu taulukkolaskentaohjelman sujuvaan käyttöön, mm. soluviittaukset, lajittelu/järjestäminen ja suodatus (eli oleellisen informaation erottaminen)
- harjaantuu tilastollisen aineiston sujuvaan käsittelyyn: oppii tiivistämään tietoa taulukoimalla ja määrittämään tunnuslukuja sekä havainnollistamaan tilastoja erilaisilla kaavioilla
- oppii piirtämään hajontakuviota, sovittamaan regressiosuoran sekä määrittämään korrelaatiokertoimen
- tutustuu ajankohtaisen tilastotiedon etsimiseen ja lataamiseen eri verkkolähteistä sekä tiedon käsittelyyn, kuvaamiseen ja analysoimiseen
- oppii laskemaan kombinaatioita
- tutustuu todennäköisyyden olemukseen esim. simuloimalla nopanheittoa.

Keskeiset sisällöt

- tilastoaineiston havainnollistaminen ja tunnuslukujen määrittäminen
- regression ja korrelaation käsitteet
- havainto ja poikkeava havainto
- ennusteiden tekeminen
- todennäköisyyden käsite
- yhteen- ja kertolaskusääntö
- kombinaatiot ja tuloperiaate
- todennäköisyytlaskennan malleja

Tarkennuksia sisältöihin

Tilastoaineiston käsittely. Perusjoukko ja otos. Tutustutaan sekä diskreetteihin että jatkuviin tilastollisiin muuttujiin. Luokittelu: luokkarajat, todelliset luokkarajat, luokkakeskus (tasaväliset luokat). Frekvenssitaulukot ja tilastollinen todennäköisyys. Tilastolliset tunnusluvut: vaihteluväli, keskiluvut (moodi, mediaani, keskiarvo) ja keskihajonta (otoskeskihajonta). Tunnuslukujen laskentaperiaatteen ymmärtäminen. Tarkastellaan tilastoja eri aloilta, mm. biologia, maantiede, historia, terveystieto.

Tilaston havainnollistaminen. Tilaston kuvaamiseen sopivimman kaaviotyypin valinta: ympyrädiagrammi, pylväs- ja palkkikuvaaja, histogrammi (tasaväliset luokat) sekä viivakaavio (aika-sarjat ja summafrekvenssikuvaaja), hajontakuviot. Kaavion tulkitseminen.

Poikkeava havainto. Poikkeava havainto on sellainen muuttujan arvo, joka poikkeaa suuresti havaittujen arvojen valtaenemistöstä. Arvon poikkeavuus arvioidaan kuvaajasta. Ymmärrys, että poikkeavilla arvoilla voi olla merkittävästi vääristävä vaikutus tilastollisiin tunnuslukuihin, kuten keskiarvoon, hajontaan, regressiosuoraan jne.

Tilastollinen riippuvuus. Selittävä ja selitettävä muuttuja, hajontakuviot, lineaarisen riippuvuuden havainnoiminen hajontakuviosta. Regressiosuora ja korrelaatiokerroin. Ennusteiden tekeminen muodostetun regressiomallin avulla. Ennusteen arvioiminen esim. visuaalisesti ja tarkastelemalla ennusteiden mielekkyyttä: kuvaako malli ilmiötä tietyllä välillä tai välin ulkopuolella.

Todennäköisyyslaskenta. Todennäköisyyden olemukseen tutustuminen esim. tekemällä havaintoja nopanheitosta. Todennäköisyyslaskennan mallit: klassinen, geometrinen ja tilastollinen todennäköisyys. Alkeistapausten laskemismenetelmiä (tuloperiaate ja kombinaatiot). Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö ja erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö sekä komplementtisääntö. Venn-diagrammin hyödyntäminen laskusääntöjen havainnollistamisessa.

3,14159265358979323846264338327950
2884197169399375105820974944592307
8164062862089986280348253421170679
8214808651328230664709384460955058
2237725259408128781117450284102701
9375211855596446229489549303819644
2881097566593844612847564823378678
3165277201909145645669234603486104
5432664821339360726024914127372458
7006606315588114881520920962829254
0917153843678925902600113305305488
2046652138414695184151160943305727
03657595919530921861173819326117931

MAB6

Talousmatematiikan alkeet (1 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- hallitsee talousmatematiikan peruskäsitteet ja -taidot
- syventää prosenttilaskennan taitojaan
- oppii kuvaamaan talouselämän asioiden kehittymistä
- osaa käyttää tietolähteitä ja ohjelmistoja laskelmien tekemisessä sovellusten yhteydessä.

Talousmatematiikan osuus on jaettu kahteen moduuliin. Tämä ensimmäinen moduuli sisältää verotuksen, indeksit, valuutat ja rahan arvon sekä yksinkertaisen korolaskennan. Toinen moduuli (MAB7) on yhtenevä moduulin MAA9 kanssa, mikä mahdollistaa opintokokonaisuuden muodostamisen yhteiskuntaopin taloustiedon moduulin YH2 kanssa.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii muodostamaan indeksisarjan ja kuvaamaan sitä taulukkolaskentaohjelmalla (viivakaavio)
- osaa ratkaista potenssiyhtälön (esim. keskimääräisen vuotuisen hinnanmuutoksen ratkaiseminen)
- tutustuu talouden tietojen (esim. vero- taulukoiden, valuuttakurssien ja indeksien) etsimiseen eri verkkolähteistä.

Keskeiset sisällöt

- suhteellinen osuus, vertailu, muutoksen laskeminen

Tarkennuksia sisältöihin

Prosenttilaskenta. Syvennetään moduulissa MAY1 opittuja prosenttilaskennan taitoja mm. tarkastelemalla prosenttilausekkeita ja laskemalla keskimääräistä vuotuista muutosta.

Talousmatematiikan peruskäsitteet. Näillä viitataan keskeisiin sisältöihin.

- indeksi
- korkokäsite, yksinkertainen korko
- verotus
- valuutta

Indeksit. Yksinkertaisen indeksisarjan muodostaminen. Indeksien käyttö (esim. indeksiin sidotut suureet). Tutustutaan esim. kuluttajahintaindeksiin käyttöön hintatason, inflaation ja rahan ostovoiman mittarina; kuluttajahinnat ja reaaliansiota-so. Eriaikaisten rahasummien vertailu.

Korkolaskenta. Korkon käsite ja yksinkertainen korkolaskenta. Korkoaika ja korkokausi. Talletukset ja lähdevero.

Verotus ja valuutat. Ansiotuloverotuksen peruseriaatteen: valtion tulovero, verotaulukot ja veron progressiivisuus, kunnallisvero. Brutto- ja nettotulo. Arvonlisävero-tus (ja haittaverot). Valuuttamuunnokset. Devalvaation ja revalvaation vaikutusta kuluttajahintoihin voidaan tarkastella keskeisiä sisältöjä syventävässä osuudessa.

3,14159265358979323846264338327950
 2884197149399875105820971944592307
 816562147105820971944592307
 822408651328230664709384460955058
 223172535408128481117450284102701
 9385211058596446229489549303819644
 2881097556593344112847564823378678
 3165271201909145645669234603486104
 543265821339360726024914127372458
 700606315588174385520920962829254
 0917153643678925903840173305305488
 2044452138414695134151160943305727
 03657595919530921861173819326117931

MAB7

Talousmatematiikka (1 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii hyödyntämään matemaattisia valmiuksiaan resurssien riittävyteen, talouden suunnitteluun, yrittäjyyteen ja kannattavuuden laskentaan
- soveltaa lukujonojen kaavoja talouteen liittyvissä matemaattisissa ongelmissa
- oppii sovittamaan taloudellisiin tilanteisiin matemaattisia malleja ja ymmärtää niiden rajoitukset
- osaa hyödyntää ohjelmistoja laskelmien tekemisessä ja sovellusten yhteydessä.

Talousmatematiikan osuus on jaettu kahden moduulin. Tämä toinen moduuli sisältää korkolaskennan, talletukset, lainat sekä taloudellisiin tilanteisiin liittyvät mallit. Moduuli on yhtenevä moduulin MAA9 kanssa, mikä mahdollistaa opintokokonaisuuden muodostamisen yhteiskuntaopin taloustiedon moduulin YH2 kanssa. YH2-moduuliin voi yhdistää talousmatematiikan moduuleja sekä pitkän että lyhyen matematiikan oppimääristä. On mahdollista muodostaa näiden kaikkien kolmen moduulin yhteinen opintojakso tai kaksi eri opintojaksoa: YH2+MAB7 tai YH2+MAA9.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa hyödyntää symbolista laskentaa talousmatematiikan laskuissa ja yhtälönratkaisussa (esim. annuiteettilainan yhteydessä)
- harjaantuu käsittelemään lukujonoja: esim. tallentamaan lukujonon funktiona $f(n)$, laskemaan lukujonon jäseniä ja ratkaisemaan yhtälöitä
- oppii tekemään lainalaskelmia (esim. taulukkolaskentaohjelmassa)
- tutustuu esim. verkosta löytyvien laskureiden (esim. hiilijalanjälki) laskentaperiaatteisiin.

Keskeiset sisällöt

- aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja niiden summat
- korkolaskut: koron korko, nykyarvo ja diskonttaus
- talletukset ja lainat
- taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja, joissa hyödynnetään lukujonoja ja summia

Tarkennuksia sisältöihin

Lukujonot. Lukujonojen ja summien perusteet on opiskeltu moduulissa MAB2. Tässä moduulissa tarkastelu painottuu lukujonojen sovelluksiin. Sovelluksina tarkastellaan esim. peräkkäisiä sijoituksia (kuten talletuksia) ja sijoitusten kokonaisarvoa. Talouden sovellusten lisäksi voidaan tarkastella esim. ekologisten resurssien riittävyyttä kuten luonnonvarojen riittävyytlaskelmia (esim. fossiilisten polttoaineiden kuten öljyn, ruuan ja puhtaan veden riittävyys).

Korkolaskenta. Koronkorkolaskussa tutustutaan yleisiin käytäntöihin korkoaikojen laskemisessa, tulosten pyöristämisessä jne. Koronkorko- ja diskonttausmenetelmä: kasvanut pääoma, eriaikaisten maksujen nykyarvo.

Lainat. Peruskäsitteet (lainapääoma, lyhennys, takaisinmaksuerä jne.). Eri lainamuodot (asuntolaina, opintolaina, kulutsluotto, pikavippi) ja takaisinmaksuperiaatteet (tasalyhennyslaina, tasaerä- eli annuiteettilaina ja kiinteä tasaerälaina) sekä lainan hoito (lyhennysten, korkojen ja jäljellä olevan lainan määrän laskeminen eri lainamuodoissa, ja eri lainamuotojen vertailu).

MAB8

Matemaattinen analyysi (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutkii funktion muutosnopeutta graafisin ja numeerisin menetelmin
- ymmärtää derivaatan tulokinnan funktion muutosnopeutena
- osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla
- osaa määrittää sovellusten yhteydessä polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon
- osaa käyttää ohjelmistoja funktion kulun tutkimisessa sekä funktion derivaatan ja suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellusten yhteydessä.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii piirtämään funktion kuvaajalle sekantin ja määrittämään funktion keskimääräisen muutosnopeuden
- oppii piirtämään funktion kuvaajalle tangentin ja määrittämään funktion muutosnopeuden (graafinen derivointi) sekä havainnoimaan funktion kasvuvuutta graafisesti (kuvaajalle piirretyn tangentin avulla)
- harjaantuu sujuvaan lausekkeiden käsittelyyn (sieventämiseen ja arvon laskemiseen)
- osaa derivoida funktion ja laskea derivaatan arvon sekä ratkaista nollakohdat symbolisesti
- osaa selvittää derivaattafunktion merkin kuvaajan perusteella (polynomifunktion merkki voi vaihtua vain nollakohdassa)

Keskeiset sisällöt

- graafisia ja numeerisia menetelmiä
- polynomifunktion derivaatta
- polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen

Tarkennuksia sisältöihin

Funktion muutosnopeus. Keskimääräinen ja hetkellinen muutosnopeus: polynomifunktion kuvaajalle piirretyn sekantin ja tangentin kulmakertoimen laskeminen kahden pisteen avulla likimääräisesti kuvaajasta. Keskimääräisen muutosnopeuden laskeminen lausekkeen avulla. Ei kasvua, vakiokasvu, kiihtyvä tai hidastuva

- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä
- funktion muutosnopeuden määrittäminen ohjelmistojen avulla

kasvu. Funktion kasvavuuden ja vähenevyyden havainnointi kuvaajasta.

Derivaatta. Havainnollisesti esiteltynä ilman täsmällistä määritelmää; derivaatan yhteys muutosnopeuteen ja tangenttiin. Polynomifunktion derivointi ja derivaatan arvon laskeminen. Käytännön maksimointi- ja minimointiongelmia mm. geometrian ja talouden aloilta.

3,14159265358979323846264338327950
 2884197169399375105820974944592307
 8164062862089986280348253421170679
 8214808651328230664709384460955058
 2234725359408128481117450284102701
 9348211055596446229489549303819644
 2881097366593344612847564823378678
 3165277201909145645669234603486104
 5432664821335360726024914127372458
 7006806315588174881520920962829254
 0917153843676925903600113305305488
 2046652138414695184151160943305727
 03657595919530921861173819326117931

MAB9

Tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu normaalijakaumaan matemaattisena mallina
- tutustuu binomijakaumaan matemaattisena mallina
- vahvistaa ja monipuolistaa tilastojen käsittely- ja tutkimustaitojaan ohjelmistojen avulla
- tietää, kuinka lasketaan tilastollisiin jakaumiin liittyviä tunnuslukuja ja todennäköisyyksiä, ja osaa määrittää ne ohjelmistojen avulla
- ymmärtää luottamusvälin ja virhemarginaalin käsitteen ja osaa määrittää ne ohjelmistojen avulla.

Moduulissa vahvistetaan MAB5-moduulin sisältöjen hallintaa: todennäköisyyslaskennan periaatteita (erityisesti todennäköisyyden laskusäännöt binomitodennäköisyyden yhteydessä) sekä tilastojen käsittelytapoja. Moduulissa voidaan keskittyä MAB5-moduulin sisältöjen vahvistamiseen ja täydentämiseen tai painottaa keskeisiä uusia malleja. Moduulin sisältöjä voi olla luontevaa yhdistää esimerkiksi psykologiaan (tilastollisen tutkimuksen periaatteet). Moduuli voidaan toteuttaa esimerkiksi tutkimus- ja projektitöiden muodossa.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa moduulissa MAB5 hankkimiaan tilastojen käsittelyyn ja kuvaamiseen liittyviä taitojaan: tunnuslukujen laskemista ja todennäköisyyksien määrittämistä
- osaa laskea kombinaatioita (binomitodennäköisyys)
- oppii esittämään binomijakauman graafisesti sekä määrittämään jakauman tunnusluvut (odotusarvon ja keskihajonnan)
- oppii piirtämään normaalijakauma-kuvaajia
- oppii määrittämään binomijakaumaan ja normaalijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä sekä ratkaisemaan käänteisen tilanteen
- oppii ratkaisemaan normaalijakauman tuntemattoman odotusarvon tai keski-

hajonnan symbolisesti tilanteissa, jotka eivät edellytä jakauman normittamista

- tuntee luottamusvälin määrittämisessä tarvittavat suureet ja osaa määrittää ne sekä luottamusvälin.

Keskeiset sisällöt

- normaalijakauma ja jakauman normittamisen käsitteet (odotusarvo ja keskihajonta)
- toistokoe
- binomijakauma
- luottamusvälin ja virhemarginaalin käsite

Tarkennuksia sisältöihin

Binomijakauma. Toistokoe ja binomito-dennäköisyyden laskukaavan tunteminen. Binomijakauma, odotusarvo ja keskihajonta. Kertymätodennäköisyys.

Normaalijakauma. Jakauman perusominaisuuksien (mm. symmetria) tunteminen ja normaalijakauma-mallin käyttö sovel-luksissa. Kertymätodennäköisyys ja kerty-mäfunktio. Normittaminen ja kahden nor-maalijakauman vertailu. Normitettu normaalijakauma ja luottamusvälin käsite, kriittiset arvot. Binomijakauman yhteys normaalijakaumaan esimerkinomaisesti tarkastellen.

Tilastollinen päättely. Käsitellään tiedo-tusvälineissä esille tulevaa ajankohtaista tilastollista informaatiota. Perusjoukko, jonka tunnuslukuja (keskiarvoa ja suhteel-lista osuutta) arvioidaan otoksesta lasket-tujen tunnuslukujen avulla muodostamalla luottamusväli. Keskiarvon keskivirheen laskeminen. Luottamustaso ja sen vaikutus luottamusväliin. Virhemarginaali. Luotta-musvälin muodostamisen perusperiaate: on tunnettava otoskoko, otoskeskiarvo ja otoskeskihajonta tai suhteellinen osuus otoksessa, luottamustaso ja siihen liittyvä kriittinen arvo. Teoreettiset perustelut luottamusvälin muodostamiselle (otoksen keskiarvo ja prosenttiosuus ovat likimain normaalijakautuneita) voidaan sivuuttaa. Tilastollinen testaus ei kuulu moduulin keskeisiin sisältöihin.