

Pitkän matematiikan tukimateriaalia

Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019
pitkän matematiikan moduulien sisältöjen tarkastelua



Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry:n edustajat ja
Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 laadinnassa
mukana olleen aineryöryhmän jäsenet ovat yhteistyössä tuottaneet
tukimateriaalia perusteissa annettujen ainekohtaisten
keskeisten sisältöjen avaamiseksi pitkässä matematiikassa.

SISÄLLYS

Pakolliset opinnot

MAY1 Luvut ja yhtälöt	9
MAA2 Funktiot ja yhtälöt 1	12
MAA3 Geometria.....	14
MAA4 Analyyttinen geometria ja vektorit.....	16
MAA5 Funktiot ja yhtälöt 2	19
MAA6 Derivaatta.....	21
MAA7 Integraalilaskenta	24
MAA8 Tilastot ja todennäköisyys	26
MAA9 Talousmatematiikka	28
Valtakunnalliset valinnaiset opinnot	
MAA10 3D-geometria	30
MAA11 Algoritmit ja lukuteoria	32
MAA12 Analyysi ja jatkuva jakauma	34

Kiitämme tuesta:



Teknologiateollisuuden
100-vuotissäätiö



This event is supported by the European Commission's H2020 programme – project Scientix 3 (Grant agreement N. 730009), coordinated by European Schoolnet (EUN). The event is the sole responsibility of the organizer and it does not represent the opinion of the European Commission (EC) or EUN, and neither the EC or EUN are responsible for any use that might be made of information contained.

JOHDANTO

Tämä matematiikan paikallisen opetussuunnitelmatyön laadintaa tukemaan tarkoitettu materiaali on tehty yhteistyössä Opetushallituksen lukion matematiikan opetussuunnitelman perusteiden työryhmän ja Matemaattisten aineiden opettajien ajonejärjestö MAOL:n kanssa. Materiaalin tarkoitus on täsmentää ja avata opetussuunnitelman perusteiden normiluonteesta johtuvaa varsin tiivistä esitystä. Sen toivotaan selventävän perustetyöryhmän ajatuksia sisältöjen karsimisesta ja rajaamisesta sekä tuovan uusia näkökulmia opetuksen suunnitteluun. Tukimateriaali ei ole velvoittava, vaan ehdotetut toteuttamistavat ja esimerkit ovat suuntaa antavia.

Uudessa lukion opetussuunnitelman perusteissa on kuvattu laaja-alainen osaaminen yleisesti ja oppiainekohtaisesti. Paikalliseen opetussuunnitelmaan on määrätty kirjattavaksi, kuinka laaja-alaisen osaamisen tavoitteet aiotaan toteuttaa eri opintojaksoissa. Tukimateriaali avaa sitä, kuinka laaja-alainen osaaminen voisi näkyä matematiikan opetuksessa. Matematiikan luonteesta johtuen, näyttää siltä, että parhaiten laaja-alaisen osaamisen osa-alueet ovat toteutettavissa kaikissa opintojaksoissa painottaen kulloinkin tilanteeseen sopivaa laaja-alaista osaamista.

Uudet lukion opetussuunnitelman perusteet edellyttävät, että matematiikan opiskelussa opiskelija kehittyy hyödyntämään tietokoneohjelmistoja ja digitaalisia tiedonlähteitä oppimisessa, tutkimisessa ja ongelmanratkaisussa sekä arvioimaan tietoteknisten välineiden hyödyllisyyttä ja käytön rajallisuutta. Tässä tukimateriaalissa esitetään, kuinka opiskelijan ohjelmistotaitoja voitaisiin kehittää opintojen edetessä, ja mitä taitoja tavoitellaan. Ohjelmistotaitojen parantaminen tehdään vaiheittain liittämällä ne kulloinkin opintojaksossa käsiteltyihin sisältöihin. Keskeisenä tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu käyttämään ohjelmistoja järkevästi ja valitsemaan tilanteeseen parhaiten sopivan välineen (mm. taulukkolaskenta, symbolinen laskenta, geometrian ohjelmat).

Tukimateriaalissa ohjelmistotaitojen kuvausten yhteydessä käytetään sanoja *tutustuu*, *oppii*, *osaa* ja *harjaantuu* seuraavissa merkityksissä:

Tutustuu. Opiskelija kohtaa taidon ehkä ensimmäistä kertaa ja oppii sen mahdollisesti myöhemmissä opinnoissaan. Tässä kohtaa opintoja tavoitteena voi olla esimerkiksi mielenkiinnon herättäminen.

Oppii. Opiskelija harjoittelee taitoa (mahdollisesti) ensimmäistä kertaa.

Osaa. Aiemmissa opinnoissa opittua taitoa kehitetään mahdollisesti uudessa tilanteessa.

Harjaantuu. Taitoa on harjoiteltu tai harjoitellaan paljon, jolloin osaaminen rutinoituu.

LAAJA-ALAINEN OSAAMINEN MATEMATIIKASSA

Opetuksessa tutkitaan arkielämän ja matematiikan välisiä yhteyksiä, hyödynnetään mahdollisuuksia vahvistaa opiskelijan kiinnostusta, itsetuntoa ja tiedonhankintaprosesseja sekä kannustetaan opiskelijaa kokeiluihin ja sinnikkääseen työskentelyyn. Matematiikassa opittavia taitoja sovelletaan omien tavoitteiden asettamisessa ja päätöksenteossa sekä pohditaan, kuinka matematiikan taitoja voidaan hyödyntää kestävässä kehityksessä ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa. Näin vahvistetaan opiskelijan yhteiskunnallista osaamista, eettisyyttä ja ympäristöosaamista sekä hyvinvointiosaamista.

Opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla. Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja, joissa opiskelijat työskentelevät yksin ja yhdessä. Tällä vahvistetaan muun muassa vuorovaikutusosaamista. Opetustavat valitaan yhdessä opiskelijoiden kanssa. Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä.

Matematiikan opiskelu tukee globaali- ja kulttuuri-osaamisen sekä monitieteisen ja luovan osaamisen laaja-alaisia tavoitteita. Opiskelijaa ohjataan ymmärtämään matematiikan merkitys erilaisissa kulttuureissa ja historian kehityksessä sekä sen luonne universaalina kielenä. Opiskelija oppii hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin sekä matematiikassa että muissa oppiaineissa. Opiskelijaa rohkaistaan käyttämään matematiikan kieltä ja merkintöjä sekä ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä. Opiskelijaa tuetaan taidossa siirtyä eri matemaattisen tiedon esitysmuodoista toiseen ilmiöiden mallintamisessa, ongelman ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa sekä tuloksesta keskustelemisessä.

LAAJA-ALAISEN OSAAMISEN TAITOJEN KEHITTYMINEN MATEMATIIKASSA

Lukion opetussuunnitelman perusteissa on kuvattu, miten laaja-alaisen osaamisen osa-alueet sisältyvät matematiikan opintoihin, ja ne on huomioitu myös matematiikan opintojen tavoitteissa. Paikallisessa opetussuunnitelmassa laaja-alaisen osaamisen tavoitteita täydennetään ja konkretisoidaan matematiikan kohdalla sekä määritellään, miten eri osa-alueiden tavoitteita toteutetaan kussakin opintojaksossa.

Matematiikan opinnoissa laaja-alaista osaamista lähestytään tieteenalan lähtökohdista. Laaja-alaisuus voisi näkyä matematiikan opetuksessa mm. seuraavilla tavoilla:

Opiskelijaa ohjataan tavoitteellisesti tunnistamaan ja hyödyntämään omia vahvuuksiaan ja toisaalta kehittämiskohteitaan sekä huomaamaan, että menestyksellinen matematiikan opiskelu vaatii pitkäjänteistä työntekoa ja sinnikkyyttä. Opetuksessa tuetaan epävarmuuden sietokykyä ja vahvistetaan luottamusta, jolloin opiskelija oppii arvioimaan myös omia voimavarojaan ja suunnittelemaan ajankäyttöä. Opetuksessa kannustetaan vastuunottoon omasta oppimisesta luomalla työn tekemisen kulttuuri, joka arvostaa omaa ja muiden osaamista ja sallii erityisosaamista mutta myös epäonnistumisia. Opiskelutaitojen kehittymistä ohjataan tavoitteellisesti, jolloin opiskelija omaksuu matematiikan oppimista tukevia käytänteitä. (Hyvinvointiosaaminen)

Opetustilanteissa rakennetaan positiivinen, avoin ja kannustava ilmapiiri tukemaan jokaista opiskelijaa ja auttamaan heitä saavuttamaan omia tavoitteita, sillä ns. positiivinen kierre imee heikommatkin opiskelijat mukaan. Turvallinen opiskeluympäristö kannustaa opiskelijoita keskusteluun, omien ratkaisumenetelmien esittämiseen ja oman ajattelun sanoittamiseen sekä yhteistyöhön, yhdessä tutkimiseen ja oppimiseen. (Vuorovaikutusosaaminen)

Opetuksessa rohkaistaan opiskelijaa tarkastelemaan ongelmia uudella tavalla, yhdistelemään asioita sekä soveltamaan matematiikan menetelmiä eri oppiaineissa. Monitieteellinen lähestymistapa voi motivoida oppimaan uutta ja innostaa uteliaisuuteen sekä merkityksien etsimiseen. Opintojen aikana tutustutaan erilaisiin tiedonhankinnan ja -esittämisen tapoihin digi-ajassa, ja matematiikan kannalta olennaisten monilukutaidon osa-alueiden (sanallinen, numeerinen, symbolinen, kuvallinen) hallintaa syvennetään tavoitteellisesti. Samalla opiskelija oppii arvioimaan matemaattisesti esitetyn tiedon luotettavuutta ja sovellusaloja. (Monitieteinen ja luova osaaminen)

Opinnot ohjaavat opiskelijaa kehittävään ja uudistuvaan otteeseen suhteessa omaan uraan ja taloudenhoitoon sekä yrittäjämäiseen asenteeseen. Opetus tukee opiskelijan yritteliäisyyttä ja yrittäjämäistä toimintaa sekä opettaa työn loppuunsaattamisen merkityksen. Opiskeluun luodaan ”yrittäjämäinen” ilmapiiri, joka antaa vapauksia mutta kannustaa vastuunottoon. (Yhteiskunnallinen osaaminen)

Läpi matematiikan opintojen opiskelijaa autetaan hahmottamaan, että matematiikan avulla voidaan jäsentää ja ratkaista globaaleja ongelmia. (Eettisyys ja ympäristöosaaminen, Globaali- ja kulttuuriosaaminen)

MAY1

Luvut ja yhtälöt (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- kertaa prosenttilaskennan periaatteet
- osaa käyttää verrannollisuutta ongelmanratkaisussa
- syventää murtolukujen laskutoimitusten osaamistaan
- kertaa potenssin laskusäännöt
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää yhtälön ja yhtälöparin ratkaisemisen periaatteet
- oppii käyttämään ohjelmistoja funktion kuvaajan piirtämisessä, havainnoinnissa ja yhtälöiden ratkaisemisessa.

Moduulissa keskitytään perusopetuksessa opiskeltujen sisältöjen kertaamiseen ja syventämiseen. Moduulin aikana kiinnitetään erityistä huomiota siirtymiseen luvuista symbolien käyttöön. Moduulin aikana voidaan keskittyä perusasioiden osaamisen vahvistamiseen tai osaamisen syventämiseen ja laajentamiseen. Moduulin aikana myös luodaan ne opiskelutottumukset, joihin myöhempien moduulien opiskelu perustuu sekä otetaan käyttöön niitä ohjelmistoja, joita tullaan hyödyntämään myöhemmissä opinnoissa.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu sujuvaan laskinohjelmien käyttöön peruslaskutoimitusten yhteydessä (tarkka arvo ja likiarvo)
- oppii tallentamaan funktion ja laskemaan funktion arvoja
- oppii piirtämään funktion kuvaajan sekä muuttamaan koordinaatiston asetuksia tilanteeseen sopivaksi
- oppii tutkimaan funktion kuvaajaa: havainnoimaan funktion arvoa, merkkiä, nollakohtia sekä muita leikkauspisteitä
- oppii ratkaisemaan yhtälön symbolisesti (ratkaise-toiminto)
- oppii ratkaisemaan yhtälöparin graafisesti ja symbolisesti
- tutustuu sähköiseen vastaamiseen matematiikassa (esim. kaavaeditorin käyttö).

Keskeiset sisällöt

- lukujoukot ja peruslaskutoimitukset
- luvun vastaluku, käänteisluku ja itseisarvo
- prosenttilaskenta
- potenssin laskusäännöt (eksponenttina kokonaisluku)
- suoraan ja kääntäen verrannollisuus
- funktio, kuvaajan piirto ja kuvaajan tulkinta
- ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen
- yhtälöpari
- neliö- ja kuutiojuuri
- potenssifunktio ja potenssiyhtälö (asteluvut 2 ja 3)

Tarkennuksia sisältöihin

Peruslaskutoimitukset ja laskujärjestys.

Lukujoukot luonnollisista luvuista reaali-lukuihin, lukusuora ja lukujen suuruusjärjestys. Rationaaliluvun esitys murtolukuna, päättyvänä desimaalilukuna tai jaksollisena desimaalilukuna. Murtolukujen peruslaskutoimitukset mukaan lukien käänteisluku ja potenssiin korotukset (n kokonaisluku). Negatiivinen ja nollas potenssi sekä luvun kymmenpotenssiesitys. Irrationaaliluku. Tarkka arvo ja likiarvo. Luvun neliö ja kuutio, neliö- ja kuutiojuuri: määritelmät. (Neliöjuuren laskusäännöt opiskellaan moduulissa MAA2. Yleinen juuri ja potenssiyhtälö opiskellaan moduuleissa MAA2 ja MAB4).

Prosentti. Prosenttiyksikkö, prosenttikerroin. Perusarvon ratkaiseminen. Vertailu- ja muutosprosentti, peräkkäiset muutokset. Tarkastellaan monipuolisesti ilmiöitä, joihin liittyy prosentuaalisia muutoksia.

Verrannollisuus. Suoraan ja kääntäen verrannollisia suureita käytännön tilanteissa. Ongelman muotoileminen yhtälöksi. Verrantomuotoisen yhtälön ratkaiseminen.

Funktio. Funktiokäsitteen täsmennys. Muuttuja, funktion arvo, funktion lauseke ja funktion arvon laskeminen. Muuttujan arvon ratkaiseminen. Funktion kuvaaja ja sen tulkitseminen: nollakohdan ratkaiseminen algebrallisesti ja graafisesti sekä funktion merkin havainnointi. Kuvaajan ja lausekkeen yhdistäminen. (Määrittely- ja arvojoukko opiskellaan moduuleissa MAA2 ja MAA5.)

Yhtälö ja yhtälöpari. Ensimmäisen asteen yhtälön ja potenssiyhtälön ($n = 2,3$) ratkaiseminen. Sen tutkiminen, onko annettu luku yhtälön ratkaisu. Nimittäjien poistaminen yhtälöstä. Lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen sekä sijoitus- että eliminointimenetelmällä.

12345678910111213141516171819202122
 232425262728293031323334353637383
 940414243444546474849505152535455
 565758596061626364656667686970717
 273747576777879808182838485868788
 8990919293949596979899100101102103
 10410510610710810911011111211311411
 51161171181191201211221231241251261
 27128129130131132133134135136137138
 13914014114214314414514614714814915
 01511521531541551561571581591601611
 62163164165166167168169171017117217

MAA2

Funktiot ja yhtälöt 1 (3 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu ilmiöiden matemaattiseen mallintamiseen polynomi-, rationaali- ja juurifunktioiden avulla, tuntee polynomi-, rationaali ja juurifunktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä sekä tietää polynomifunktion nollakohtien ja polynomin tekijöiden välisen yhteyden
- osaa ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä
- osaa käyttää ohjelmistoja polynomi-, rationaali- ja juurifunktioiden tutkimisessa sekä polynomi-, rationaali- ja juuriyhtälöiden ja polynomiepäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusten yhteydessä.

Moduulissa tutustutaan polynomi- ja rationaalifunktioiden sekä juurifunktioiden ominaisuuksiin ja niiden käyttöön ilmiöiden kuvaamisessa ja ongelmanratkaisussa

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa moduulissa MAY1 hankkimiaan yhtälön ja yhtälöparin ratkaisemiseen sekä funktion tarkasteluun liittyviä taitojaan
- oppii sieventämään lausekkeita sekä jakamaan polynomeja tekijöihin
- osaa ratkaista moduuliin kuuluvia yhtälöitä ja epäyhtälöitä graafisesti ja symbolisesti; osaa määrittää ratkaisulle tarkan arvon ja likiarvon
- oppii tutkimaan, esim. liukusäätimen avulla, miten polynomifunktion kertoimet vaikuttavat funktion kuvaajaan
- harjoittelee sähköistä vastaamista.

Keskeiset sisällöt

- polynomifunktio ja -yhtälö sekä polynomiepäyhtälö
- 2. asteen yhtälön ratkaisukaava
- polynomien tulo ja binomikaavat (summan neliö, summan ja erotuksen tulo)

Tarkennuksia sisältöihin

Polynomit. Polynomilausekkeiden sieventäminen ja tekijöihinjako nollakohtien avulla. Polynomilausekkeen muodostaminen nollakohtien ja yhden arvon avulla. Binomikaavat molempiin suuntiin. (Neliöksi täydentäminen voidaan käsitellä vasta moduulissa MAA4.)

- polynomien tekijät
- potenssifunktio ja potenssiyhtälö (eksponenttina positiivinen kokonaisluku)
- rationaalifunktiot ja -yhtälöt
- juurifunktiot ja -yhtälöt

Polynomiyhtälöt ja -epäyhtälöt. Ensimmäisen ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen, diskriminanttitarkastelut. Tulon nollasääntö. Sellaiset korkeamman asteen yhtälöt, joiden ratkaiseminen perustuu tulon nollasääntöön, kun tekijöihin jaossa hyödynnetään ryhmittelyä ja/tai yhteisen tekijän erottamista. Bikvadraattiset ja muut toisen asteen yhtälöön palautuvat yhtälöt. Yleinen juuri ja potenssiyhtälöt ($n \in \mathbb{Z}_+$). Polynomiepäyhtälö voidaan ratkaista nollakohtien ja esim. kuvaajan tai testipisteiden avulla (polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdassa).

Funktiot. Toisen ja kolmannen asteen polynomifunktion sekä potenssifunktion kuvaajan tyypilliset piirteet. Funktion määrittelyjoukko (tai määrittelyehto) ja sen vaikutus funktion kuvaajaan ja yhtälöiden ratkaisuihin. Neliöjuuren laskusäännöt ja neliöjuurilausekkeiden sieventäminen. Juuriyhtälön ratkaiseminen ja saadun ratkaisun arvioiminen (tarkistamalla tai yhtälön määrittely- ja neliöönkorotusehdon perusteella). Murtopotenssi ja sen yhteys juureen käsitellään moduulissa MAA5. Rationaalilausekkeiden käsittely ja sieventäminen. Yksinkertaiset rationaaliyhtälöt. Rationaalifunktion merkkitarkastelu käsitellään moduulissa MAA6.

MAA3

Geometria (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- osaa soveltaa yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa
- harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa sisältäviä lauseita
- osaa käyttää ohjelmistoja tutkiessaan kuvioita ja kappaleita sekä niihin liittyvää geometriaa.

Moduulin aikana on luontevaa harjaantua opiskelijaa tekemään havaintoja ja etsimään säännönmukaisuuksia sekä omien tutkimusten pohjalta esittämään kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii tutkimaan kuvioiden ominaisuuksia ja säännönmukaisuuksia dynaamisen geometrian ohjelmalla (esim. ympyrän keskuskulma ja kehäkulma, kolmion merkilliset pisteet)
- oppii piirtämään mallikuvan ja tarkistamaan laskemalla saadun ratkaisun
- tutustuu yksinkertaisten mallikuvien piirtämiseen myös yo-kokeen A-osan ohjelmistoilla
- oppii ratkaisemaan ongelman konstruoidulla kuvion tai kappaleen ja määrittämällä kulman, pituuden, pinta-alan tai muun mitan hyödyntämällä ohjelmistoa
- harjaantuu laskinohjelmien rohkiaan hyödyntämiseen geometrian ongelmien ratkaisemisessa (mm. laskemisessa, sieventämisessä ja yhtälönratkaisussa sekä sinin, kosinin ja tangentin arvojen laskemisessa ja terävän kulman ratkaisemisessa).

Keskeiset sisällöt

- kuvioden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- monikulmioihin liittyvien pituuksien, kulmien ja pinta-alojen laskeminen
- ympyrän ja sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
- suoraan lieriöön ja suoraan kartioon sekä palloon liittyvien pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Tarkennuksia sisältöihin

Suorakulmainen kolmio. Pythagoraan lause (ja sen käänteislause). Terävän kulman trigonometriset suhteet sini, kosini ja tangentti. Muistikolmiot. (Tangenttifunktio on poistettu sisällöistä ainoastaan moduulissa MAA5.)

Kolmiot ja muut monikulmiot. Monikulmion kulmien summa. Tasakylkisen kolmion ja suunnikkaan ominaisuudet. Säännölliset monikulmiot. Sini- ja kosinilause, kolmion pinta-ala.

Kuvioden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus. Yhdenmuotoisuus ja mittakaava. Yhdenmuotoisten kuvioden pinta-alojen ja yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde. Kolmioiden kk-yhdenmuotoisuuslause. Kolmion kulmanpuolittajalause.

Ympyrä. Kehän, kaaren ja jänteen pituus. Ympyrän, sektorin ja segmentin pinta-ala. Kehäkulmalause. Ympyrän tangentti ja tangenttikulmalause.

Avaruusgeometria. Kappaleisiin liittyviä nimityksiä (mm. särmä, tahko, pohja, vaippa; särmiö, pyramidi, tetraedri). Riittää, että opiskelija hallitsee palloon, suoraan lieriöön sekä suoraan kartioon liittyviä pituus-, pinta-ala ja tilavuuslaskuja sekä yksinkertaisia avaruuskulmiin liittyviä laskuja (esim. kuution sisään syntyvät kulmat) ja piirroksia. Sisäkkäisiin avaruuskappaleisiin liittyvät haastavammat tilanteet voidaan käsitellä moduulissa MAA10. Kulma avaruudessa opiskellaan tarkemmin moduulissa MAA10.

MAA4

Analyttinen geometria ja vektorit (3 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää, kuinka analyttinen geometria luo yhteyksiä geometrinen ja algebrallisten käsitteiden välille
- ymmärtää yhtälön geometrisen merkityksen
- osaa ratkaista muotoa $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$ olevia itseisarvo-yhtälöitä
- ymmärtää vektorikäsitteen ja perehtyy vektorilaskennan perusteisiin
- osaa tutkia kaksiulotteisen koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia vektoreiden avulla
- osaa ratkaista tasogeometrian ongelmia vektoreiden avulla
- osaa käyttää ohjelmistoja käyrien ja vektoreiden tutkimisessa sekä niihin liittyvissä sovelluksissa.

Moduulissa perehdytään geometriaan tasokoordinaatistossa. Analyttisen geometrian menetelmät luovat yhteyden geometrinen ja algebrallisten käsitteiden välille, kun geometrinen muoto (pistejoukko) ilmaistaan yhtälönä. Vektorilaskenta monipuolistaa geometrian menetelmiä ja tuo erilaista näkökulmaa geometrinen ongelmien ratkaisemiseen. Osa moduulin keskeisistä sisällöistä voidaan käsitellä joko analyttisen geometrian tai vektorilaskennan keinoin. Avaruuden vektorit, suorat ja tasot käsitellään moduulissa MAA10.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa piirtää erilaisia tasokäyriä ja havainnollistaa käyräparvea esim. liukusäätimellä
- osaa ratkaista yhtälöryhmän symbolisesti (esim. paraabelin lausekkeen muodostaminen annettujen pisteiden avulla)
- oppii ratkaisemaan itseisarvo-yhtälön graafisesti ja symbolisesti sekä havainnoimaan, miten käyrät $y = f(x)$ ja $y = |f(x)|$ liittyvät toisiinsa
- harjaantuu sujuvuuteen mallikuvan piirtämisessä ja laskemalla saadun vastauksen tarkistamisessa
- oppii piirtämään vektoreita sekä tekemään vektorien laskutoimituksia (vektoreiden yhteenlasku, luvulla kertominen, pituuden laskeminen, yksikkövektorin

muodostaminen, pistetulo ja vektoreiden välisen kulman laskeminen) symbolisesti.

Keskeiset sisällöt	Tarkennuksia sisältöihin
• käyrän yhtälö • suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälö • yhtälöryhmä • suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus • itseisarvoyhtälö • pisteen etäisyys suorasta • vektoreiden perusominaisuudet • tason vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku sekä tason vektorin kertominen luvulla • tason vektoreiden pistetulo, tason vektoreiden välinen kulma	Käyrän yhtälö. Karteesinen tasokoordinaatisto ja sen piste, suora, ympyrä sekä paraabeli. Yhtälön toteuttavat xy-tason pisteet muodostavat xy-tason käyrän. Suoran ja ympyrän yhtälöt (eri esitysmuodot). Neliöksi täydentäminen ympyrän tai paraabelin yhtälön käsittelyn yhteydessä. Ympyrän tangentit. Paraabeli, jonka akseli on koordinaattiakselien suuntainen. Poltopiste ja johtosuora. Paraabelin yhtälön eri esitysmuodot (nollakohtamuotoinen ja huippupistemuotoinen yhtälö). Yhtälöpari ja menetelmät eri leikkauspisteiden ratkaisemiseen (kaksi suoraa, ympyrä ja suora, paraabeli ja suora jne.) Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuperiaate. Itseisarvo. Itseisarvon määritelmä ja yhtälöt, joiden ratkaiseminen perustuu määritelmään. (Neliöönkorotusmenetelmä voidaan esitellä, mutta itseisarvoepäyhtälö on poistettu opetussuunnitelman sisällöistä.) Vektoreiden perusominaisuudet. Vektorilla on suunta ja pituus: vektori on objekti, joka ilmaisee siirtymää (tietyn verran, tiettyyn suuntaan). Nollavektori. Vastavektori. Yhdensuuntaiset, samansuuntaiset, vastakkaissuuntaiset ja kohtisuorat vektorit; näihin liittyvät merkinnät. Vektorin pituus, vektorin suuntainen yksikkövektori, vektorien välinen kulma.

Vektorit. Tarkastelun painopiste on xy -tason vektoreissa. Koordinaatistossa olevan vektorin esittäminen x - ja y -suuntaisten komponenttien avulla (i - ja j -kantavektorit). Yleinen kannan käsite voidaan sivuuttaa. Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus, suuntakulma ja suorien välinen kulma voidaan käsitellä analyttisen geometrian menetelmillä (kulmaker-toimen avulla) tai vektorien avulla (yhden-suuntaiset vektorit, pistetulo).

12345678910111213141516171819202122
 232425262728293031323334353637383
 940414243444546474849505152535455
 565758596061626364656667686970717
 273747576777879808182838485868788
 8990919293949596979899100101102103
 10410510610710810911011111211311411
 51161171181191201211221231241251261
 27128129130131132133134135136137138
 13914014114214314414514614714814915
 01511521531541551561571581591601611
 6216316416516616716816917017117217

MAA5

Funktiot ja yhtälöt 2 (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu ilmiöiden matemaattiseen mallintamiseen sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmi-funktioiden avulla
- tutkii sini- ja kosinifunktioita yksikköympyrän symmetrioiden avulla
- osaa ratkaista sellaisia trigonometrisia yhtälöitä, jotka ovat tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$
- osaa soveltaa sini- ja kosinifunktioiden yhteyttä $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- tuntee eksponentti- ja logaritmi-funktioiden ominaisuudet ja osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä
- osaa käyttää ohjelmistoja funktioiden tutkimisessa ja yhtälöiden ratkaisemisessa sovellusten yhteydessä.

Moduuli täydentää moduulissa MAA2 tehtyjä tarkasteluja, kun tutustutaan sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmi-funktioiden ominaisuuksiin ja niiden käyttöön ilmiöiden kuvaamisessa ja ongelmanratkaisussa. Moduuli antaa mahdollisuudet ohjelmistojen monipuoliseen käyttöön, mm. kuvaajien hahmottamisessa, mallintamisessa sekä yhtälöiden ratkaisemisessa.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa piirtää yksikköympyrän, suunnatun kulman ja kehäpisteen sekä tutkia näitä (mm. symmetrioita)
- osaa ratkaista moduulin piiriin kuuluvia yhtälöitä sekä esittää trigonometrinen yhtälöiden ratkaisussa esiintyvän jaksollisuuden
- osaa tutkia, esim. liukusäätimen avulla, miten moduulin sisältöihin kuuluvien funktioiden lausekkeessa esiintyvät kerroimet vaikuttavat funktion kuvaajaan
- osaa sovittaa esim. sinikäyrän ja eksponenttifunktion annettuun pistejoukkoon ilmiötä mallinnettaessa.

Keskeiset sisällöt

- suunnattu kulma ja radiaani
- yksikköympyrä
- sini- ja kosinifunktiot symmetria- ja jaksollisuusominaisuuksineen
- sini- ja kosiniyhtälöiden ratkaiseminen
- murtopotenssi ja sen yhteys juureen
- eksponenttifunktiot ja -yhtälöt
- logaritmi ja logaritmin laskusäännöt
- logaritmifunktiot ja -yhtälöt

Tarkennuksia sisältöihin

Trigonometriset funktiot. Sini- ja kosini-funktio (tangenttifunktio on karsittu sisäl- löistä; tangenttia käsitellään edelleen suo- rakulmaisen kolmion sivujen suhteena moduulissa MAA3). Arvojoukko, sym- metria ja jaksollisuus sekä kuvaajien pe- rusominaisuudet. Yksinkertaisten trigono- metristen yhtälöiden ratkaiseminen. Jaksollisen ilmiön mallintaminen.

Eksponenttifunktio. Potenssikäsittelyn yleistys rationaalisille ja reaalisille ekspo- nenteille (kantalukuna positiivinen luku). Kuvaajatyypit. Eksponentiaalisen kasva- misen ja vähenemisen kuvaaminen, puo- liintumisaika. (Neperin luku ja luonnolli- nen logaritmi käsitellään moduulissa MAA6.)

Logaritmifunktio. Logaritmin yhteys eksponenttifunktioon ja logaritmin ylei- nen määritelmä. Eksponentti- ja logarit- miyhtälön ratkaiseminen. Logaritmifunk- tion määrittelyjoukko ja kuvaajan peruspiirteet.

MAA6

Derivaatta (3 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tutustuu ilmiöiden matemaattisten mallien käyttäytymiseen derivaatan avulla
- omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta ja jatkuvuudesta
- ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena
- kykenee määrittämään yksinkertaisten funktioiden derivaatat
- osaa derivoida yhdistettyjä funktioita
- hallitsee funktioiden kulun tutkimisen derivaatan avulla ja osaa määrittää niiden ääriarvot suljetulla välillä
- osaa käyttää ohjelmistoja raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa sovellusten yhteydessä.

Moduulin keskeisenä päämääränä on ohjata opiskelija sisäistämään derivaatan käsite funktion muutosnopeuden mittana, hahmottamaan funktion ja sen derivaatta-funktion välinen yhteys sekä harjaannuttaa opiskelija käyttämään derivaattaa monipuolisesti funktioiden tutkimisessa sekä ääriarvo-ongelmien ratkaisemisessa. Jatkuvuus- ja derivoituvuustarkasteluihin (mm. epäjatkuviin funktioihin) perehdytään moduulissa MAA12.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu sujuvaan lausekkeiden käsittelyyn (sieventämiseen ja arvojen laskemiseen) mm. erotusosamäärän lausekkeen käsittelyssä
- oppii tutkimaan raja-arvoa esim. taulukoimalla tai kuvaajan avulla
- oppii määrittämään raja-arvoja
- oppii piirtämään funktion kuvaajalle sekantin ja tangentin (dynaamisesti), määrittämään kulmakertoimen (graafinen derivointi)
- osaa havainnoida derivaatan merkkiä ja funktion kasvavuutta (sekä funktion että derivaattafunktion) kuvaajasta
- oppii derivoimaan funktion, laskemaan derivaatan arvon ja määrittämään derivaatan nollakohdan symbolisesti
- rohkaistuu ohjelmiston hyödyntämiseen funktion derivoimisessa, yhtälönratkaisussa ja arvojen laskemisessa sovellustehävissä.

Keskeiset sisällöt

- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomi- ja rationaalifunktioiden sekä juurifunktion derivaatat
- sini- ja kosinifunktioiden sekä eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat
- funktioiden tulon ja osamäärän derivaatta
- yhdistetty funktio ja sen derivointi
- funktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

Tarkennuksia sisältöihin

Raja-arvo ja jatkuvuus. Raja-arvon laskeminen ja jatkuvuustarkastelut tilanteissa, joissa toispuoleisia raja-arvoja ei tarvita (esim. rationaalifunktion raja-arvo ja jatkuvaksi funktioksi jatkaminen tilanteessa $\frac{0}{0}$). Jatkuvuus kohdassa $x = a$ ja välillä $]a, b[$.

Derivaatta. Funktion keskimääräinen muutosnopeus ja hetkellinen muutosnopeus, erotusosamäärä ja funktion derivaatta erotusosamäärän raja-arvona. Derivaattafunktio. Aikaisemmissa moduuleissa kohdattujen alkeisfunktioiden derivoiminen (mukaanlukien ketjusääntö yksinkertaisissa tilanteissa). Käyrän tangentti ja normaali. Neperin luku ja luonnollinen logaritmi.

Funktion kulku. Kasvavan ja vähenevän funktion määritelmät. Funktion kulun (kasvavuus/vähenevyys/monotonisuus) tutkiminen sekä lokaalien ääriarvojen määrittäminen derivaatan nollakohtien ja merkin avulla (derivaatan merkki voidaan selvittää kuvaajatyypin tai testipisteiden avulla). Rationaalifunktion derivaatan merkkitarkastelu voidaan tehdä nollakohdilla, määrittelyehdolla ja testipisteillä (rationaalifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdassa tai kohdassa, jossa sitä ei ole määritelty). Yhtälön juurten olemassaolo ja yksikäsitteisyys (Bolzanon lause). Suljetulla välillä jatkuvan funktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen.

Ääriarvosovellukset. Tilannetta kuvaavan funktion muodostaminen ja määrittelyehto. Ääriarvokohtien ratkaiseminen derivaatan nollakohdista laskennallisesti. Suurimman/pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä tai funktion kulkuun vedoten: funktion kasvavuuden/vähenevyyden voi havainnoida kuvaajasta. Avaruuskappaleisiin liittyvät ääriarvosovellukset käsitellään moduulissa MAA10. Paloittain määritelty funktio sekä raja-arvot äärettömyydessä käsitellään moduulissa MAA12.

12345678910111213141516171819202122
232425262728293031323334353637383
940414243444546474849505152535455
565758596061626364656667686970717
273747576777879808182838485868788
8990919293949596979899100101102103
10410510610710810911011111211311411
51161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138
13914014114214314414514614714814915
01511521531541551561571581591601611
6216316416516616716816917017117217

MAA7

Integraalilaskenta (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja oppii määrittämään yksinkertaisten funktioiden integraalifunktioita
- ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan sekä tutustuu numeeriseen menetelmään määrätyn integraalin määrittämisessä
- osaa määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla
- perehtyy integraalilaskennan sovelluksiin
- osaa käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa, integraalifunktion määrittämisessä, määrätyn integraalin laskemisessa sovellusten yhteydessä sekä numeerisessa integroinnissa.

Moduulin keskeisenä päämääränä on, että opiskelija sisäistää integraalilaskennan peruskäsitteet: integraalifunktion ja määrätyn integraalin, ja ymmärtää niiden välisen yhteyden sekä tutustuu joihinkin integraalilaskennan sovelluksiin. Integraalilaskentaan liittyvät jatkuvat jakaumat käsitellään moduulissa MAA12.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa piirtää pinta-alan tehtävänannon mukaisesti
- osaa arvioida pinta-alan ylä- ja alasummien avulla dynaamisesti (idea määrätyn integraalin määritelmästä)
- osaa integroida funktion ja laskea määrätyn integraalin arvon (tarkan arvon ja likiarvon)
- osaa havainnollistaa, esim. liukusäätimen avulla, integroimisvakion C vaikutusta integraalifunktion kuvaajaan
- tutustuu pyörähdyskappaleen havainnollistamiseen
- tutustuu menetelmiin laskea määrättyjä integraaleja numeerisesti, esim. suorakaidesäännön avulla.

Keskeiset sisällöt

- integraalifunktio ja tärkeimpien alkeisfunktioiden integrointi,
- määrätty integraali
- suorakaidesääntö
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen

Tarkennuksia sisältöihin

Integroimistekniikat. Aikaisemmissa moduuleissa kohdattujen alkeisfunktioiden integroiminen, mukaanlukien yhdistetyn funktion derivoimiseen (ketjusaantoon) perustuva integroiminen yksinkertaisissa tilanteissa. Integroimistekniikoita voidaan laajentaa moduulissa MAA12.

Määrätty integraali. Määrätyn integraalin määritelmän idea suorakaidesäännön avulla tarkasteltuna. Määrätyn integraalin laskeminen integraalifunktion avulla (analyysin peruslause). Määrätyn integraalin laskeminen numeerisesti (likiarvona) suorakaidesäännön avulla.

Integraalilaskennan sovellukset. Määrätyn integraalin yhteys pinta-alaan ja tilavuuteen, pinta-alan ja tilavuuden laskeminen. Tutustutaan muihin integraalilaskennan sovelluksiin, esim. määrän laskemisen muutosnopeudesta. Integraalilaskennan sovelluksia voidaan laajentaa moduulissa MAA12.

MAA8

Tilastot ja todennäköisyys (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa havainnollistaa diskreettiä tilastollista jakaumaa sekä määrittää ja tulkita jakauman tunnuslukuja
- osaa havainnollistaa kahden muuttujan yhteisjakaumaa sekä määrittää korrelaatiokertoimen ja regressiokäyrän
- perehtyy kombinatorisiin menetelmiin
- perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja laskusääntöihin
- ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja tulkitsemaan sitä
- osaa käyttää ohjelmistoja digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä tilastollisen tiedon esittämisessä
- osaa hyödyntää ohjelmistoja jakaumien havainnollistamisessa, tunnuslukujen määrittämisessä sekä todennäköisyyksien laskemisessa.

Moduulissa korostuu aikaisempaa enemmän tilastojen osuus kun todennäköisyyden osuutta on kevennetty. Uutena sisältönä opiskellaan korrelaatiota ja lineaarista regressiota. Jatkuvat todennäköisyysjakaumat (kuten normaalijakauma) on siirretty moduuliin MAA12.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu taulukkolaskentaohjelman sujuvaan käyttöön, mm. soluviittaukset, lajittelu/järjestäminen ja suodatus (eli oleellisen informaation erottaminen)
- harjaantuu tilastollisen aineiston sujuvaan käsittelyyn: oppii tiivistämään tietoa taulukoimalla ja määrittämällä tunnuslukuja sekä havainnollistamaan tilastoja erilaisilla kaavioilla
- oppii piirtämään hajontakuvion, sovittamaan regressiosuoran sekä määrittämään korrelaatiokertoimen
- oppii laskemaan permutaatioita ja kombinaatioita
- oppii piirtämään binomijakauman kuvaajan, määrittämään jakauman tunnusluvut sekä määrittämään todennäköisyyksiä ja ratkaisemaan käänteisen tilanteen
- tutustuu ajankohtaisen tilastotiedon etsimiseen ja lataamiseen eri verkkolähteistä sekä tiedon käsittelyyn, kuvaamiseen ja analysoimiseen.

Keskeiset sisällöt

- keskiluvut ja keskihajonta
- korrelaatio ja lineaarinen regressio
- klassinen ja tilastollinen todennäköisyys
- permutaatiot ja kombinaatiot
- todennäköisyyden laskusäännöt
- binomijakauma
- diskreetti todennäköisyysjakauma
- diskreetin jakauman odotusarvo

Tarkennuksia sisältöihin

Tilastot. Perusjoukko ja otos. Tarkastelu voidaan rajata diskreetteihin tilastollisiin muuttujiin. Frekvenssitaulukot ja tilastollinen todennäköisyys. Tilastolliset tunnusluvut: vaihteluväli, keskiluvut (moodi, mediaani, keskiarvo) ja keskihajonta (otos-keskihajonta). Tunnuksien laskentaperiaatteen ymmärtäminen. Tilastolliset kuvaajat kuten ympyrädiagrammi, pylväs- ja palkkikuvaaja sekä summafrekvenssikuvaaja (viivakaavio). Kahden muuttujan yhteisjakauma: selittävä ja selitettävä muuttuja, hajontakuviot, lineaarisen riippuvuuden havainnoiminen hajontakuviosta. Regressiosuora ja korrelaatiokerroin. Regressiomallin avulla tehnyt ennusteet.

Todennäköisyys. Klassinen todennäköisyys ja alkeistapausten laskemismenetelmiä (tuloperiaate, permutaatiot ja kombinaatiot). Riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö ja yleinen kertolaskusääntö. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö ja yleinen yhteenlaskusääntö. Komplementtisääntö. Venn-diagrammin hyödyntäminen laskusääntöjen havainnollistamisessa. Toistokoe ja binomitodennäköisyys.

Diskreetti todennäköisyysjakauma. Satunnaismuuttuja ja pistetodennäköisyys. Jakauman odotusarvo ja sen tulkinta. Toistokoe, binomijakauma ja sen odotusarvo.

MAA9

Talousmatematiikka (1 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii hyödyntämään matemaattisia valmiuksiaan resurssien riittävyteen, talouden suunnitteluun, yrittäjyyteen ja kannattavuuden laskentaan
- soveltaa lukujonojen kaavoja talouteen liittyvissä matemaattisissa ongelmissa
- oppii sovittamaan taloudellisiin tilanteisiin matemaattisia malleja ja ymmärtää niiden rajoitukset
- osaa hyödyntää ohjelmistoja laskelmien tekemisessä ja sovellusten yhteydessä.

Moduuli on yhtenevä moduulin MAB7 kanssa, mikä mahdollistaa opintokokonaisuuden muodostamisen yhteiskuntaopin taloustiedon moduulin YH2 kanssa. YH2-moduuliin voi yhdistää talousmatematiikan moduuleja sekä pitkän että lyhyen matematiikan oppimääristä. On mahdollista muodostaa näiden kaikkien kolmen moduulin yhteinen opintojakso tai kaksi eri opintojaksoa: YH2+MAB7 tai YH2+MAA9.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii hyödyntämään symbolista laskentaa talousmatematiikan laskuissa, esim. annuiteettilainan yhteydessä
- oppii tekemään lukujonoihin liittyviä laskuja: esim. tallentaa lukujonon funktiona $f(n)$, laskea lukujonon jäseniä ja ratkaista yhtälöitä
- oppii tekemään lainalaskelmia (esim. taulukkolaskentaohjelmassa)
- tutustuu esim. verkosta löytyvien laskureiden (esim. hiilijalanjälki) laskenta-periaatteisiin.

Keskeiset sisällöt

- aritmeettinen ja geometrinen lukujono ja niiden summat
- korkolaskut: koron korko, nykyarvo ja diskonttaus
- talletukset ja lainat
- taloudellisiin tilanteisiin soveltuvia matemaattisia malleja, joissa hyödynnetään lukujonoja ja summia

Tarkennuksia sisältöihin

Lukujonot. Rajoitutaan aritmeettiseen ja geometriseen lukujonoon ja summaan. Sovelluksina tarkastellaan esim. peräkkäisiä sijoituksia (kuten talletuksia) ja sijoitusten kokonaisarvoa. Talouden sovellusten lisäksi voidaan tarkastella esim. ekologisten resurssien riittävyyttä kuten luonnonvarojen riittävyyslaskelmia (esim. fossiilisten polttoaineiden kuten öljyn, ruuan ja puhtaan veden riittävyys).

Korkolaskenta. Koronkorkolaskussa tutustutaan yleisiin käytäntöihin korkoaikojen laskemisessa, tulosten pyöristämisessä jne. Koronkorko- ja diskonttausmenetelmä: kasvanut pääoma, eriaikaisten maksujen nykyarvo.

Lainat. Peruskäsitteet (lainapääoma, lyhennys, takaisinmaksuerä jne.). Eri lainamuodot (asuntolaina, opintolaina, kulusluotto, pikavippi) ja takaisinmaksuperiaatteet (tasalyhennyslaina, tasaerä- eli annuiteetilaina ja kiinteä tasaerälaina) sekä lainan hoito (lyhennysten, korkojen ja jäljellä olevan lainan määrän laskeminen eri lainamuo-doissa, ja eri lainamuotojen vertailu).

MAA10

3D-geometria (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- syventää vektorilaskennan tuntemustaan ja oppii käyttämään vektoreita kolmiulotteisessa avaruudessa
- oppii tutkimaan xyz-koordinaatiston pisteitä, suoria ja tasoja vektoreiden avulla
- vahvistaa avaruusgeometrian osaamistaan ääriarvosovellusten yhteydessä
- tutustuu kahden muuttujan funktioon
- osaa käyttää ohjelmistoja vektoreiden, suorien, tasojen ja pintojen havainnollistamisessa sekä vektorilaskennassa.

Moduulissa täydennetään avaruusgeometrian sekä vektorilaskennan sisältöjä ja tutustutaan xyz-avaruuden suoriin, tasoihin ja pintoihin.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- osaa piirtää avaruuden pisteitä, vektoreita, suoria ja tasoja sekä pintoja
- osaa laskea vektorien piste- ja ristitulon
- osaa ratkaista lineaarisen yhtälöryhmän symbolisesti ja graafisesti
- osaa hyödyntää ohjelmistoja ääriarvosovelluksissa (derivoiminen, nollakohtien ratkaiseminen, kulun havainnointi)
- oppii piirtämään ja havainnoimaan kahden muuttujan funktion kuvaajaa, laskea funktion arvon sekä määrittää ja havainnollistaa tasa-arvokäyriä.

Keskeiset sisällöt

- vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa
- piste- ja ristitulo
- piste, suora ja taso avaruudessa

Tarkennuksia sisältöihin

Vektorit. xyz-avaruuden vektorit. Suoran suuntavektori ja suoran parametrimuotoisen yhtälö. Tason suuntavektorit ja normaalivektori. Ristitulon laskeminen ohjelmistolla ja ilman. (Tarkastelun painopiste on kuitenkin ristitulon sovelluksissa, esim. tason normaalivektorin määrittäminen, jolloin ristitulon voi määrittää ohjelmistolla). Kulmiin liittyviä laskuja vektorien avulla.

- kulma avaruudessa
- yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan sovelluksia avaruusgeometriassa
- kahden muuttujan funktio ja pinta avaruudessa

Avaruuskappaleet ja ääriarvosovellukset.

Sisäkkäisiin avaruuskappaleisiin liittyvät haastavammat tilanteet sekä avaruuskappaleisiin liittyvät ääriarvosovellukset (derivaattatarkastelut).

Kahden muuttujan funktio. Reaaliarvoiset funktiot. Kuvaajan piirtäminen ja havainnointi. Kriittisen pisteen havainnointi kuvaajasta. Funktion arvo ja tasa-arvokäyrä.

12345678910111213141516171819202122
 232425262728293031323334353637383
 940414243444546474849505152535455
 565758596061626364656667686970717
 273747576777879808182838485868788
 8990919293949596979899100101102103
 10410510610710810911011111211311411
 51161171181191201211221231241251261
 27128129130131132133134135136137138
 13914014114214314414514614714814915
 01511521531541551561571581591601611
 6216316416516616716816917017117217

MAA11

Algoritmit ja lukuteoria (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- tietää mikä on algoritmi sekä oppii tutkimaan, kuinka algoritmit toimivat
- oppii toteuttamaan yksinkertaisia algoritmeja ohjelmoimalla
- perehtyy logiikan käsitteisiin
- hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta.

Ohjelmistotaidot

Moduulissa käytetään ohjelmointia apuna, kun tutkitaan lukujen ominaisuuksia ja erilaisia algoritmeja. Keskeisenä päämääränä on kokonaisuuksien ymmärtäminen ja mielenkiinnon herättäminen.

Esimerkiksi: Laadi ohjelma, joka

- tulostaa lukujen a ja b jakoyhtälön
- tulostaa jäännösluokkaa $a \bmod n$ sata pienintä positiivista jäsentä
- tutkii, onko n alkuluku peräkkäisillä jakolaskuilla, joissa jakajina $2, 3, 4, \dots, \sqrt{n}$.

Ohjelmoimalla voidaan ratkaista lisäksi esimerkiksi seuraavia ongelmia:

- neliöjuuren likiarvon laskeminen
- funktion nollakohdan etsiminen puolitusmenetelmällä
- yhtälön ratkaiseminen Newtonin menetelmällä
- alkulukututkimus Monte-Carlo-menetelmällä.

Keskeiset sisällöt

- algoritmisen ajattelun peruskäsitteet: peräkkäisyys, valinta ja toisto
- vuokaavio

Tarkennuksia sisältöihin

Logiikka. Ja, tai ja ei-konnektiivit sekä yksinkertaiset totuustaulut. Todistamista ei käsitellä erillisenä sisältönä.

- yksinkertaisten algoritmien, kuten lajittelualgoritmien tai yhtälön numeeriseen ratkaisuun liittyvän algoritmin ohjelmointi
- konnektiivit ja totuusarvot
- kokonaislukujen jaollisuus, jakoyhtälö ja kongruenssi
- Eukleideen algoritmi
- aritmetiikan peruslause

Ohjelmointi. Ohjelmointi toteutetaan jollakin ohjelmointikielellä, esimerkiksi Pythonilla. Opetussuunnitelman tavoitteita ei voi saavuttaa pelkällä taulukkolaskennalla.

12345678910111213141516171819202122
 232425262728293031323334353637383
 940414243444546474849505152535455
 565758596061626364656667686970717
 273747576777879808182838485868788
 8990919293949596979899100101102103
 10410510610710810911011111211311411
 51161171181191201211221231241251261
 27128129130131132133134135136137138
 13914014114214314414514614714814915
 01511521531541551561571581591601611
 6216316416516616716816917017117217

MAA12

Analyysi ja jatkuva jakauma (2 op)

Tavoitteet

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- syventää ymmärrystään analyysin peruskäsitteistä
- osaa muodostaa ja tutkia aidosti monotonisten funktioiden käänteis-funktioita
- täydentää integraalilaskennan taitojaan
- perehtyy jatkuvan todennäköisyys-jakauman käsitteeseen ja oppii sovel-tamaan normaalijakaumaa
- osaa käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa ja epä-oleellisten integraalien laskemisessa sovellusten yhteydessä.

Moduulissa syvennetään ja laajennetaan analyysiin liittyvien käsitteiden hallintaa ja menetelmiä.

Ohjelmistotaidot

Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

- oppii piirtämään paloittain määritellyn funktion
- osaa tutkia funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta kuvaajan avulla sekä laskennallisesti
- osaa määrittää raja-arvoja (myös äärettö-myydessä)
- oppii määrittämään käänteisfunktion lausekkeen (yhtälön avulla) ja käänteis-funktion määrittelyjoukon
- osaa laskea epäoleellisia integraaleja raja-arvon avulla
- oppii piirtämään normaalijakauma-kuvaajia
- oppii määrittämään normaalijakaumaan liittyviä todennäköisyyksiä ja ratkaise-maan käänteisen tilanteen sekä ratkaise-maan tuntemattoman odotusarvon tai keskihajonnan symbolisesti tilanteissa, jotka eivät vaadi normittamista

Keskeiset sisällöt

- paloittain määritelty funktio
- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- käänteisfunktio
- funktioiden raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit
- jatkuvat jakaumat, normaalijakauma ja normittaminen

Tarkennuksia sisältöihin

Analyysin peruskäsitteet. Kerrataan ja syvennetään moduuleissa MAA6 ja MAA7 opiskeltuja analyysin käsitteitä: funktion määrittely- ja arvojoukko, raja-arvo, jatkuvuus ja derivoituvuus, derivaatta ja derivaattafunktio, integraalifunktio ja määrätty integraali. Toispuoleinen raja-arvo ja derivaatta. Esimerkkejä epäjatkuvista funktioista sekä funktioista, jotka ovat jatkuvia mutta eivät ole derivoituvia (esim. itseisarvofunktio). Moduulissa voidaan esim. syventää ja laajentaa derivaattatarkasteluja (mm. 2. kertaluvun derivaatta) tai integroimistekniikoita tai tutustua määrätyn integraalin sovelluksiin (mm. käyrän pituus, pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala, funktion keskiarvo).

Jatkuvien funktioiden yleiset ominaisuudet. Lukio-opinnoissa esiintyvät alkeisfunktiot ja itseisarvofunktio ovat määrittelyjoukossaan jatkuvia. Bolzanon lause: tietyllä välillä jatkuvan funktion erimerkkisten arvojen välissä on nollakohta. Jatkuva funktio voi siis vaihtaa merkkiään vain nollakohdassa (tai kohdassa, jossa sitä ei ole määritelty). Suljetulla välillä jatkuva funktio saa pienimmän ja suurimman arvonsa sekä kaikki arvot näiden välissä.

Derivoituvien funktioiden yleiset ominaisuudet. Lukio-opinnoissa esiintyvät alkeisfunktiot ja itseisarvofunktio ovat määrittelyjoukossaan derivoituvia (paitsi juurifunktio ja itseisarvofunktio kohdassa $x = 0$). Derivoituva funktio on jatkuva, mutta jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva. Derivaatan merkin yhteys funktion kulkuun ja ääriarvoihin (ml. monotonisuuden tutkiminen). Sovelluksina esim. yhtälön juurten olemassaolon ja

lukumäärän tutkiminen sekä epäyhtälö-tarkastelut.

Käänteisfunktio. Ehto olemassaolo: bijektiivisyys. Esim. aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio. Määrittely- ja arvojoukko. Lausekkeen ratkaiseminen. Funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen (mistä seuraa mm. että niiden derivaatat ovat vastinpisteissä toistensa käänteislukuja).

Raja-arvot ja epäoleellinen integraali.

Raja-arvot äärettömyydessä ja raja-arvona ääretön. Sovelluksena esim. rationaali-funktion asymptootit (pysty- ja vaakasuorat) ja arvojoukko. Raja-arvojen määrittäminen laskemalla (supistukset ja sievennykset, esim. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$). Epäoleellisen integraalin määritelmä raja-arvona: tapaukset, joissa integrointiväli rajoittamaton tai funktion arvojoukko rajoittamaton.

Jatkuvat jakaumat. Tiheysfunktio ja kertymäfunktio. Todennäköisyyden ja odotusarvon määrittäminen integraalilaskennan keinoin (ohjelmistolla). Normaalijakauman perusominaisuuksien (mm. symmetria) tunteminen ja esimerkkejä normaalijakaumamallin käytöstä sovelluksissa. Normittamisen periaate ja eri normaalijakaumien vertailu. Binomijakauman yhteys normaalijakaumaan esimerkinomaisesti tarkastellen.